

Math. P.
109.11

Math. P. 109 n

Dronke

DIE
KEGELSCHNITTE
IN
SYNTHETISCHER BEHANDLUNGSWEISE
FÜR DIE
PRIMA HÖHERER LEHRANSTALTEN

VON
DR. A. DRONKE,
DIREKTOR DER REALSCHULE I. O. ZU TRIER.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.

A

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1880. 1881.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Drittes Heft. [276 S.] gr. 8. geh. n. *M* 6.40.

Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit notisque illustravit I. L. HEIBERG. Vol. I. [IV u. 276 S. mit vielen Figuren im Text.] 8. geh. *M* 6.—

Brockmann, F. J., Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. Mit 46 Holzschnitten im Text. Zweite Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. Mit vielen Holzschnitten im Text. [VIII u. 804 S.] gr. 8. geh. n. *M* 20.—

Doll, Dr. M., Lehrer der praktischen Geometrie am Großh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Lehrbuch der praktischen Geometrie zum Unterricht an Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen. Mit Figuren im Text. [IV u. 77 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

Eddy, Dr. H. T., Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität zu Cincinnati, neue Konstruktionen aus der graphischen Statik. Mit zehn Figuren im Text und sechs Tafeln. Vom Verfasser vermehrte und verbesserte deutsche Ausgabe. [IV u. 106 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4.—

General-Register der Zeitschrift für Mathematik und Physik 1856—1880. Jahrg. I—XXV. gr. 8. 1881. geh. *M* 3.60.

Helmert, Dr. F. R., Professor an der technischen Hochschule zu Aachen, die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie. Einleitung u. I. Theil: Die mathematischen Theorien. Mit vielen Figuren im Text. [XV u. 631 S.] gr. 8. geh. n. *M* 18.—

Herwig, Dr. Hermann, Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt, physikalische Begriffe und absolute Maasse. [VIII und 89 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. NATANI. Mit Figuren im Text. gr. 8. 1881. geh. *M* 6.—

Jordan, Dr. W., Prof. am Großh. Polytechnikum zu Karlsruhe, Kreis-Coordinationen für 200 Radien. [48 S.] 16. In Leinwand kart. n. *M* 1.20.

Klempt, Diedr. Aug., Realschullehrer in Rostock, Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen Hundert Beispielen. [XII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4.—

DIE
KEGELSCHNITTE
IN
SYNTHETISCHER BEHANDLUNGSWEISE

FÜR DIE
PRIMA HÖHERER LEHRANSTALTEN

VON

DR. A. DRONKE,

DIREKTOR DER REALSCHULE I. O. ZU TRIER.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1881.



Vorrede.

Die Behandlung der Kegelschnitte nach ihren hauptsächlichsten Eigenschaften bildet schon jetzt einen integrierenden Teil des mathematischen Pensums der Prima der Realschulen I. O.; für die Gymnasien wird von sehr vielen und sehr kompetenten Seiten die Aufnahme der Kegelschnitte in den Lehrplan nachdrücklich verlangt, sei es unter gleichzeitiger Entlastung der Primaner in einem andern Gebiete, um nicht eine Überlastung herbeizuführen (wie z. B. Du Bois-Reymond), oder sei es ohne eine solche Erleichterung in anderen Disziplinen (wie Eckstein u. a. m.). So groß nun auch die Zahl der Lehrbücher der analytischen Geometrie für höhere Anstalten ist, so klein ist einstweilen noch, wie mit Recht Direktor Dr. Heilmann auf der XXXIV. Versammlung deutscher Philologen (in den Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion) hervorhob die Zahl der Lehrbücher, welche die Kegelschnitte für die Primaner höherer Lehranstalten in nicht analytischer Weise behandeln und die Schüler mit den Anfangsgründen der neueren Geometrie, welche auf so überraschend einfache und elegante Weise die weitgehendsten Resultate liefert, bekannt machen. Der Unterricht in der Lehre von den Kegelschnitten wird aber erst recht fruchtbar, wenn die verschiedenen Methoden dem Geiste des Schülers die Mannigfaltigkeit der Wege zeigen, auf denen man zu denselben Resultaten gelangen kann. Ich selbst behandle daher seit Jahren in Prima die Kegelschnitte immer abwechselnd: in dem einen Jahre analytisch, in dem anderen synthetisch.

Im vorliegenden Werkchen habe ich den von mir bis jetzt stets befolgten Lehrgang (den einen Primakursus) beibehalten und sind die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte, soweit sie sich leicht durch die betreffende Methode vermittelt bekannter Sätze ableiten lassen, in zwei verschiedenen Weisen betrachtet: zunächst ohne Voraussetzung der neueren Anschauungen, also ohne den Begriff des Doppelverhältnisses und ohne Berücksichtigung des Vorzeichens bei den Liniengrößen; dann aber vollständig in dem Geiste der neueren Geometrie, wobei ich die notwendigsten Sätze dieser letzteren vorausgeschickt habe, um auch für die Schulen das Büchlein brauchbar zu machen, welche in den unteren Klassen die neuere Geometrie nicht berücksichtigen.

Dem ersten Teil habe ich den Namen „euklidische Behandlungsweise“ gegeben, obschon ich mir vollständig bewußt bin, daß die angewandte Methode durchaus nicht überall dem Geiste des großen Altmeisters der Mathematik, dessen Name ich gebraucht habe, entspricht; aber wir haben einstweilen keinen anderen Namen für die früher allgemein gebräuchliche Behandlungsweise und deshalb möge man mir diese Bezeichnung verzeihen.

Im besonderen habe ich mich bestrebt, in beiden Teilen möglichst verschiedene Beweisverfahren anzuwenden, um den Schülern eine größtmögliche Mannigfaltigkeit in der Betrachtungsweise zu zeigen; ich glaubte, nicht bloß die deutschen, sondern auch die französischen und englischen Methoden, namentlich an den Stellen berücksichtigen zu müssen, wo durch sie, sei es wegen ihrer Einfachheit und Durchsichtigkeit, oder wegen ihrer Fruchtbarkeit die Anschauung der Schüler besonders angeregt wird.

So sehr ich es bei dem Vortrage selbst für entschieden besser halte, in Prima das entwickelnde, genetische Verfahren einzuhalten, da hierdurch die Entwicklung des Geistes der Schüler zu selbständigem Denken gefördert wird, so ist für ein Lehrbuch, in welchem zu Hause ein Schüler das Vorgetragene wiederholen soll, um sich die Resultate einzuprägen, nach meiner Ansicht nur das Lehrsatz-Beweis-Verfahren das richtige; daher habe ich nur das letztere in Anwendung gebracht. Im ersten Teile habe ich außerdem die Parabel so behandelt, daß derjenige Lehrer, welcher sie vor der Ellipse und Hyperbel durchzunehmen wünscht, dies ohne irgend einen Nachteil thun kann, indem er einfach die betreffenden Abschnitte in anderer Reihenfolge behandelt.

In Bezug auf den Stoff habe ich mich soweit beschränkt, wie dies nur irgend möglich war; ich glaube aber die wesentlichsten Punkte für den Unterricht in genügender Vollständigkeit gegeben zu haben. Aufgaben habe ich in das für die Schüler bestimmte Buch nicht aufgenommen; eine Sammlung von solchen aus der Lehre der Kegelschnitte wird in einem Programme oder in einer Zeitschrift veröffentlicht werden.

Zum Schluß muß ich hier meinen Dank dem Hrn. Kollegen Müller aussprechen, der die Freundlichkeit gehabt hat, mir in der Korrektur beizustehen.

Trier, den 20. Februar 1881.

Dr. Ad. Dronke,

Direktor der Realschule I. O.

I. Teil.

Kegelschnitte in euklidischer Behandlungsweise.

I. Abschnitt.

Ellipse und Hyperbel.

§ 1. Leitlinien und Brennpunkte.

1. *Definitionen.* Der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von einem festliegenden Punkte und von einer gegebenen Geraden in konstantem Verhältnisse stehen, wird $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ genannt, wenn dieser Quotient absolut genommen $\left\{ \begin{array}{c} \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{array} \right\}$ als die Einheit ist. Der feste Punkt heisst Brennpunkt (Focus), die feste Gerade Leitlinie (Direktrix).

2. *Lehrsatz.* Das Perpendikel vom Brennpunkte auf die Leitlinie schneidet die $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ in 2 Punkten.

Beweis. Es sei F der gegebene Brennpunkt, l die Leitlinie, μ der Quotient aus den Abständen eines jeden Punktes X der Ellipse von F und l , es sei ferner noch P der Fußpunkt des Perpendikels von F auf l , so kann FP stets durch zwei Punkte A und A_1 (und zwar innerlich und äusserlich) so geteilt werden, dass

$$\frac{AF}{AP} = \frac{A_1F}{A_1P} = \mu$$

ist. (Der Beweis für die Hyperbel ist identisch mit obigem.)

3. *Definition.* Die Strecke AA_1 , welche die Schnittpunkte der $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ auf dem Perpendikel vom Brennpunkte F auf die Leitlinie l begrenzen, wird $\left\{ \begin{array}{c} \text{große} \\ \text{Haupt-} \end{array} \right\}$ Axe der Kurve genannt.

4. *Lehrsatz.* Die $\left\{ \begin{array}{c} \text{große} \\ \text{Haupt-} \end{array} \right\}$ Axe der $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ wird von Brennpunkt und Leitlinie harmonisch geteilt.

Beweis s. 2.

5. Die $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{grofse} \\ \text{Haupt-} \end{smallmatrix} \right\}$ Axe teilt die $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{smallmatrix} \right\}$ in zwei symmetrische Hälften.

Beweis. Ist X (Fig. 1) ein Punkt der Ellipse, also, unter F den Brennpunkt und l die Leitlinie verstanden,

$$\frac{XF}{XQ} = \mu,$$

wo $XQ \perp l$ ist, und ist ferner noch

$$X_1 \div X$$

in Bezug auf AA_1 , so ist

$$X_1F = XF, \quad X_1Q_1 = XQ,$$

wenn $X_1Q_1 \perp l$, und somit

$$\frac{X_1F}{X_1Q_1} = \mu,$$

d. h. X_1 ist ein Punkt der Ellipse.

(Der Beweis für die Hyperbel ist derselbe.)

6^a. Die Ellipse ist eine allseitig geschlossene Kurve, deren Punkte alle zwischen den in den Endpunkten der grofsen Axe auf dieser letztern errichteten Perpendikeln liegen (Fig. 2).

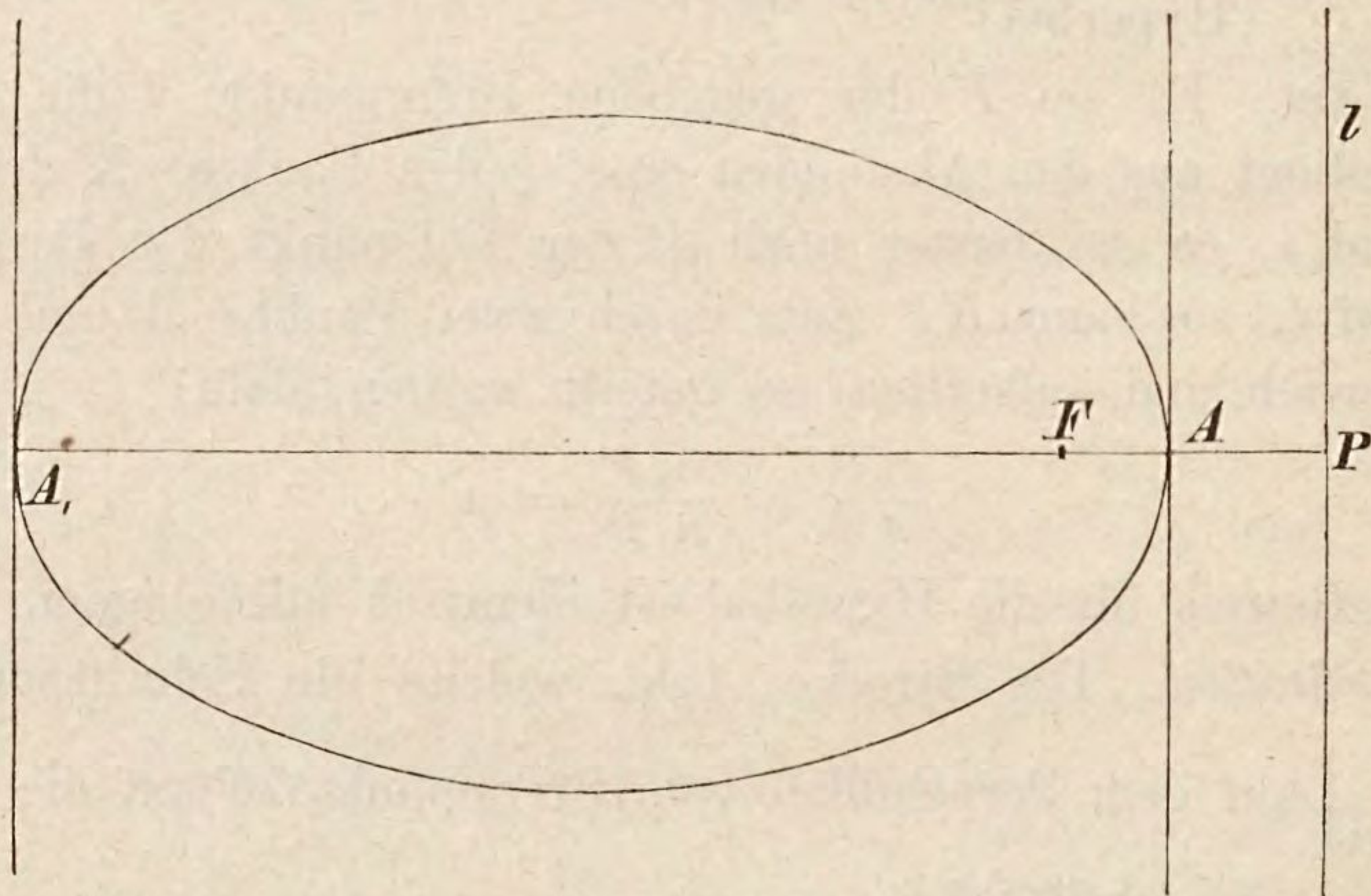


Fig. 2.

6^b. Die Hyperbel ist eine nach zwei Seiten offene Kurve, besteht aus zwei Ästen, die keinen Punkt im Endlichen gemein haben und die ganz ausserhalb der beiden in den Endpunkten der grofsen Axe auf dieser errichteten Perpendikel liegen (Fig. 3).

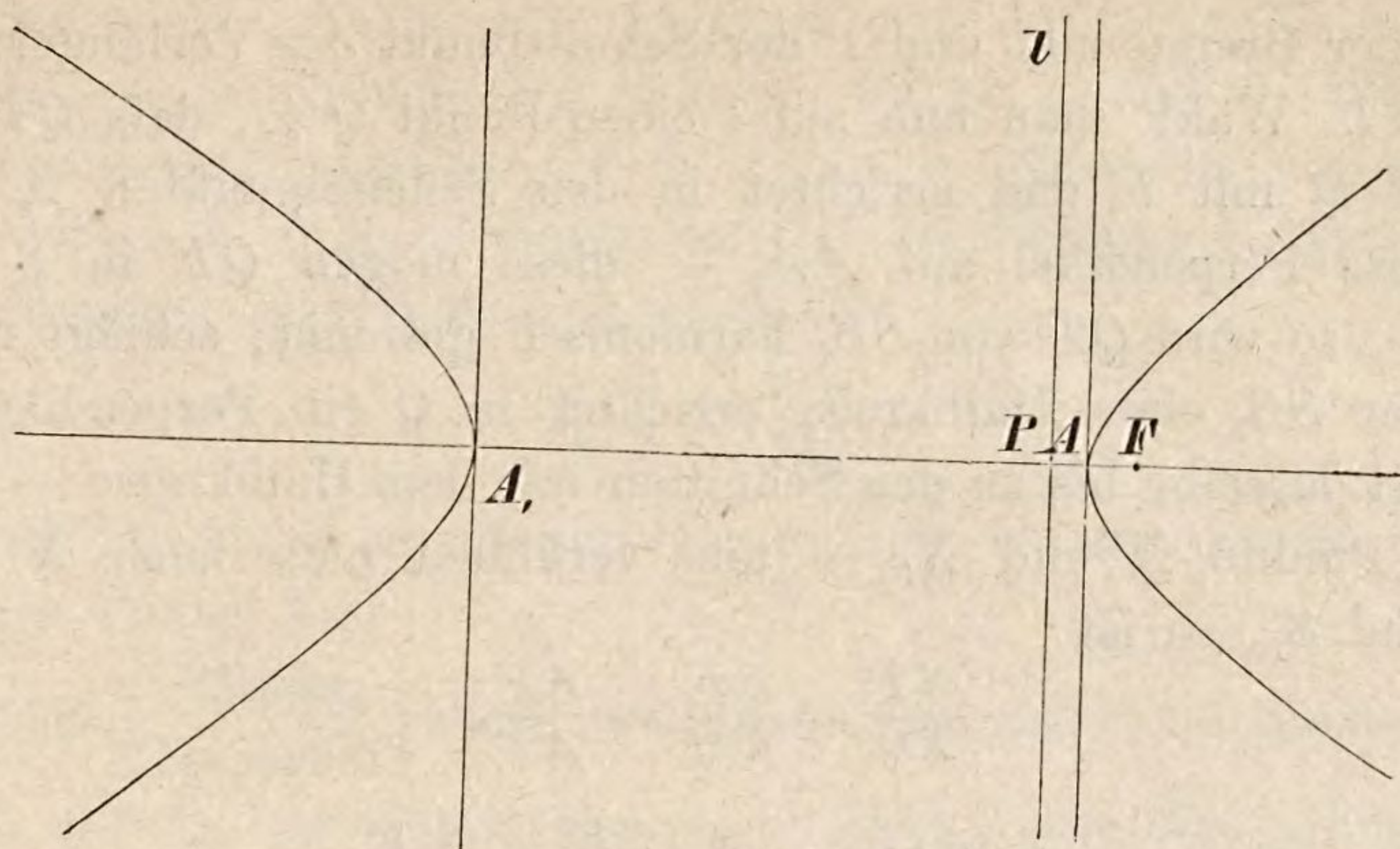


Fig. 3.

7. *Definition.* Die Endpunkte der grossen Axe werden Scheitelpunkte genannt.

8. *Lehrsatz.* Der Quotient aus den Abständen eines jeden Punktes von Brennpunkt und Leitlinie ist $\left\{ \begin{array}{l} \text{größer} \\ \text{kleiner} \\ \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{array} \right\}$ als der konstante Quotient

der Kurve, sofern der Punkt $\left\{ \begin{array}{l} \text{außerhalb} \\ \text{innerhalb} \end{array} \right\}$ der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ liegt.

9. *Definitionen.* Errichtet man im Halbierungspunkte der grossen Axe einer Ellipse auf dieser Axe ein Perpendikel, so wird das von den Schnittpunkten der Ellipse auf jener Senkrechten begrenzte Stück die kleine Axe genannt; ihre Endpunkte heissen stumpfe Scheitel. Das Perpendikel auf der grossen Axe der Hyperbel im Halbierungspunkte — es schneidet die Hyperbel nach 6^b nicht — wird Nebenaxe genannt.

10. *Lehrsatz.* Die kleine Axe teilt die Ellipse symmetrisch.

Beweis. Es sei AA_1 (Fig. 4) die grosse, BB_1 die kleine Axe, O der Schnittpunkt der beiden Axen, l die Leit-

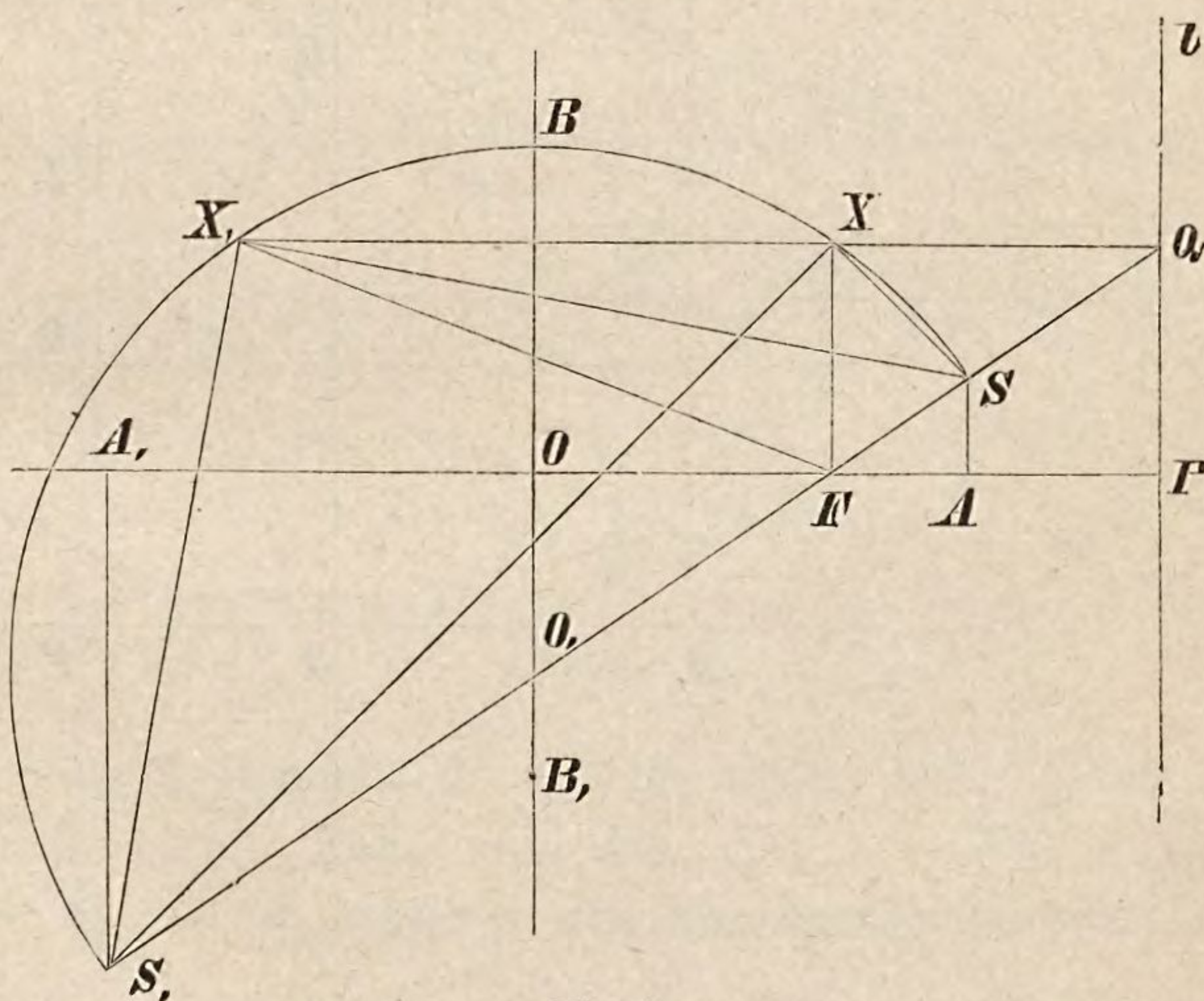


Fig. 4.

linie, F der Brennpunkt und P der Schnittpunkt der Verlängerung von AA_1 mit l . Wählt man nun auf l einen Punkt Q so, daß $QP < BO$, verbindet Q mit F und errichtet in den Scheitelpunkten A und A_1 der Ellipse Perpendikel auf AA_1 — diese mögen QF in S und S_1 treffen —, so wird QF von SS_1 harmonisch getrennt; schlägt man alsdann über SS_1 einen Halbkreis, errichtet in Q ein Perpendikel auf l , verlängert dasselbe bis zu den Schnitten mit dem Halbkreise — es seien dies die Punkte X und X_1 — und verbindet man noch X und X_1 mit S und S_1 , so ist

$$\frac{XF}{XQ} = \frac{SF}{SQ} = \frac{AF}{AP},$$

da

$$\sphericalangle S_1XS = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{SF}{SQ} = \frac{S_1F}{S_1Q},$$

und somit

$$\sphericalangle FXS = \sphericalangle QXS \text{ ist;}$$

ebenso hat man

$$\frac{X_1F}{X_1Q} = \frac{AF}{AP}.$$

Daher sind X und X_1 Punkte der Ellipse; gleichzeitig ist aber $X \div X_1$ in Bezug auf BB_1 .

11. Die Nebenaxe teilt die Hyperbel symmetrisch.

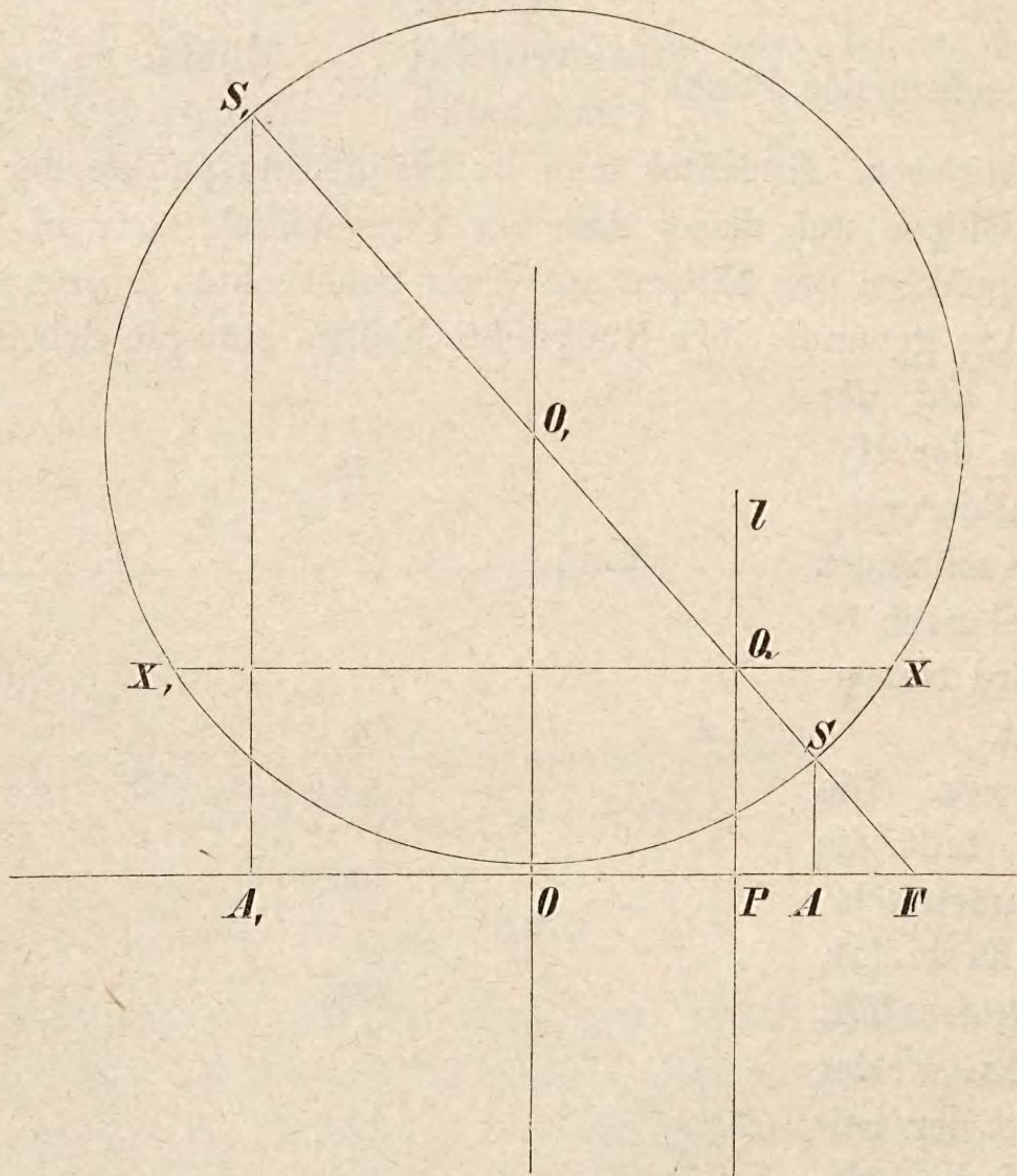


Fig. 5.

Beweis. Es sei X (Fig. 5) ein Punkt der Hyperbel; fällt man dann $XQ \perp l$, errichtet in den Scheitelpunkten A und A_1 Perpendikel, welche die Verbindungslinie QF in S und S_1 schneiden, so müssen X und X_1 , wenn $X \div X_1$ in Bezug auf OO_1 ist, auf dem Kreise über SS_1 als Durchmesser liegen; und es ist daher:

$$\frac{X_1 F'}{X_1 Q} = \frac{XF}{XQ},$$

d. h. jedem Punkte X der Hyperbel entspricht ein zur Geraden OO_1 symmetrischer Punkt X_1 .

12. Die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ hat 2 Leitlinien und zwei Brennpunkte, welche in Bezug auf das im Halbierungspunkt der grossen Axe auf dieser errichtete Perpendikel symmetrisch liegen.

13. Jede Gerade parallel oder senkrecht zur grossen Axe einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ hat mit der Kurve zwei, einen oder keinen Punkt gemeinsam.

14. *Definition.* $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipsen} \\ \text{Hyperbeln} \end{array} \right\}$ von gemeinschaftlichen Brennpunkten werden konfokal genannt.

§ 2. Brennstrahlen.

1. *Definition.* Die Verbindungslinie eines Punktes der Peripherie mit einem Brennpunkte der Ellipse bez. der Hyperbel wird Brennstrahl genannt.

2. *Lehrsatz.* Für jeden Punkt der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ist die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{array} \right\}$ der beiden Brennstrahlen konstant und zwar gleich der grossen Axe (Fig. 6).

Beweis. Es sei X ein Punkt der Ellipse,

l und l' seien deren beide Leitlinien, F und F_1 deren beide Brennpunkte, AA_1 deren grosse Axe. Fällt man nun $XQ \perp l$, $XQ_1 \perp l_1$, verbindet X mit F und F_1 , so ist, unter μ den konstanten Quotienten verstanden:

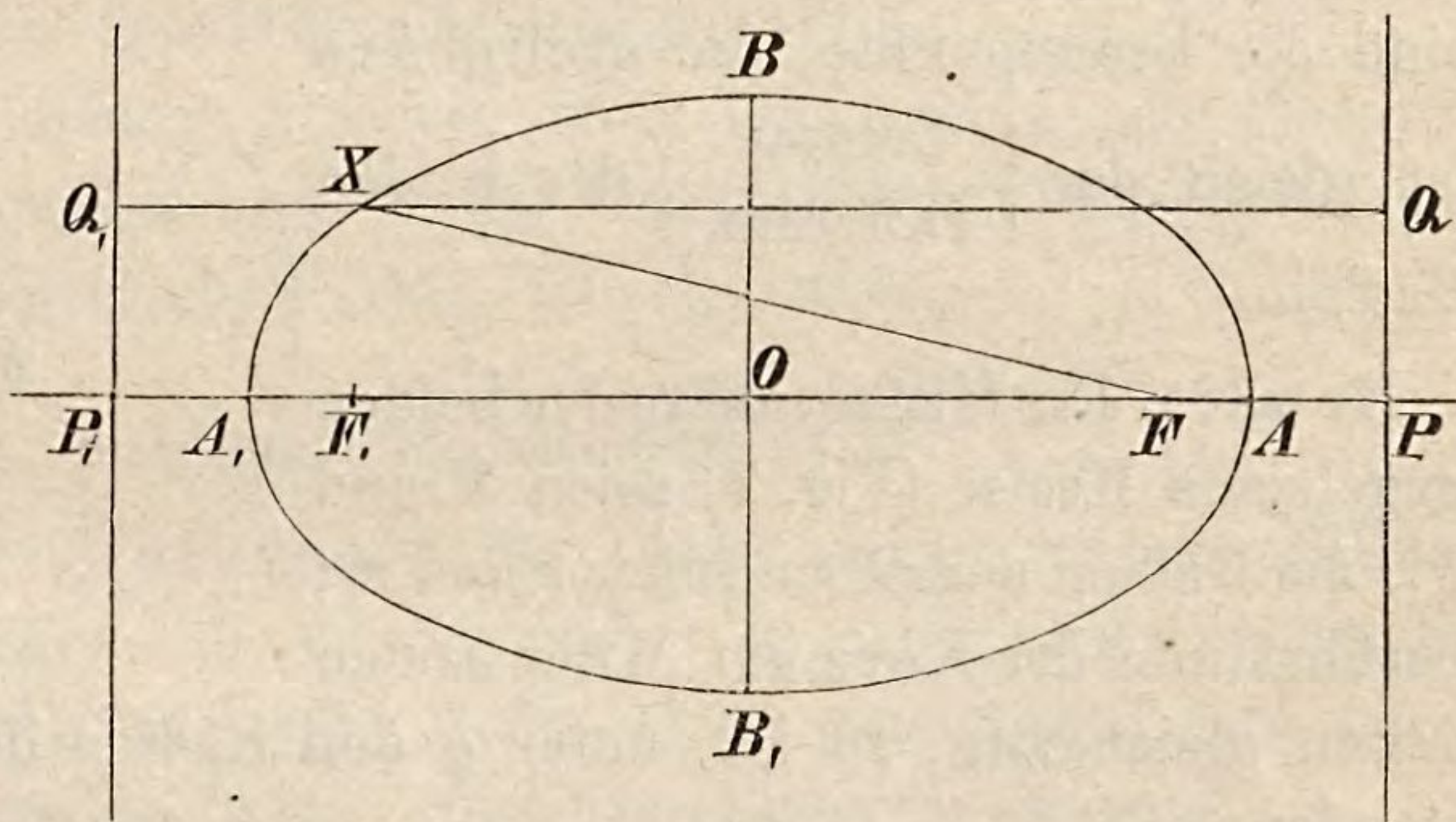


Fig. 6.

$$\frac{XF}{XQ} = \frac{XF_1}{XQ_1} = \mu,$$

daher

$$\begin{aligned} XF + XF_1 &= \mu (XQ + XQ_1) \\ &= \mu \cdot QQ_1 = \mu \cdot PP_1 = AA_1. \end{aligned}$$

Für die Hyperbel ergibt sich sofort der Beweis auf demselben Wege.

2^a. Der Abstand des stumpfen Scheitels der Ellipse von jedem Brennpunkte ist gleich der halben grossen Axe.

3. Der geometrische Ort des Punktes, für welchen die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{array} \right\}$ der Abstände von zwei festliegenden Punkten konstant ist, ist eine $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$. Die beiden festen Punkte sind Brennpunkte, die grosse Axe ist gleich der Summe der Brennstrahlen und wird durch je einen Brennpunkt und dessen zugehörige Leitlinie harmonisch geteilt.

4. Für jeden Punkt $\left\{ \begin{array}{l} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{array} \right\}$ der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ist die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{array} \right\}$ der Abstände von den Brennpunkten $\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$ als die grosse Axe; und umgekehrt.

5. Die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ist der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei festliegende Kreise $\left\{ \begin{array}{l} \text{ungleichartig} \\ \text{gleichartig} \end{array} \right\}$ berührt; die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sind die Brennpunkte, die grosse Axe ist gleich der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{array} \right\}$ der beiden Radien.

Beweis. Die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise (Fig. 7) seien F und F_1 , die Radien derselben seien r und r_1 ; berührt nun der Kreis um X die beiden ersten gleichartig, so ist, unter ϱ den Radius des letzten Kreises verstanden,

$$\begin{aligned} XF &= r \pm \varrho, \\ XF_1 &= r_1 \pm \varrho, \end{aligned}$$

daher $XF - XF_1 = r - r_1$ also konstant.

6. Berühren sich die beiden gegebenen festliegenden Kreise, so ist der Berührungspunkt ein Punkt der durch sie bestimmten Hyperbel

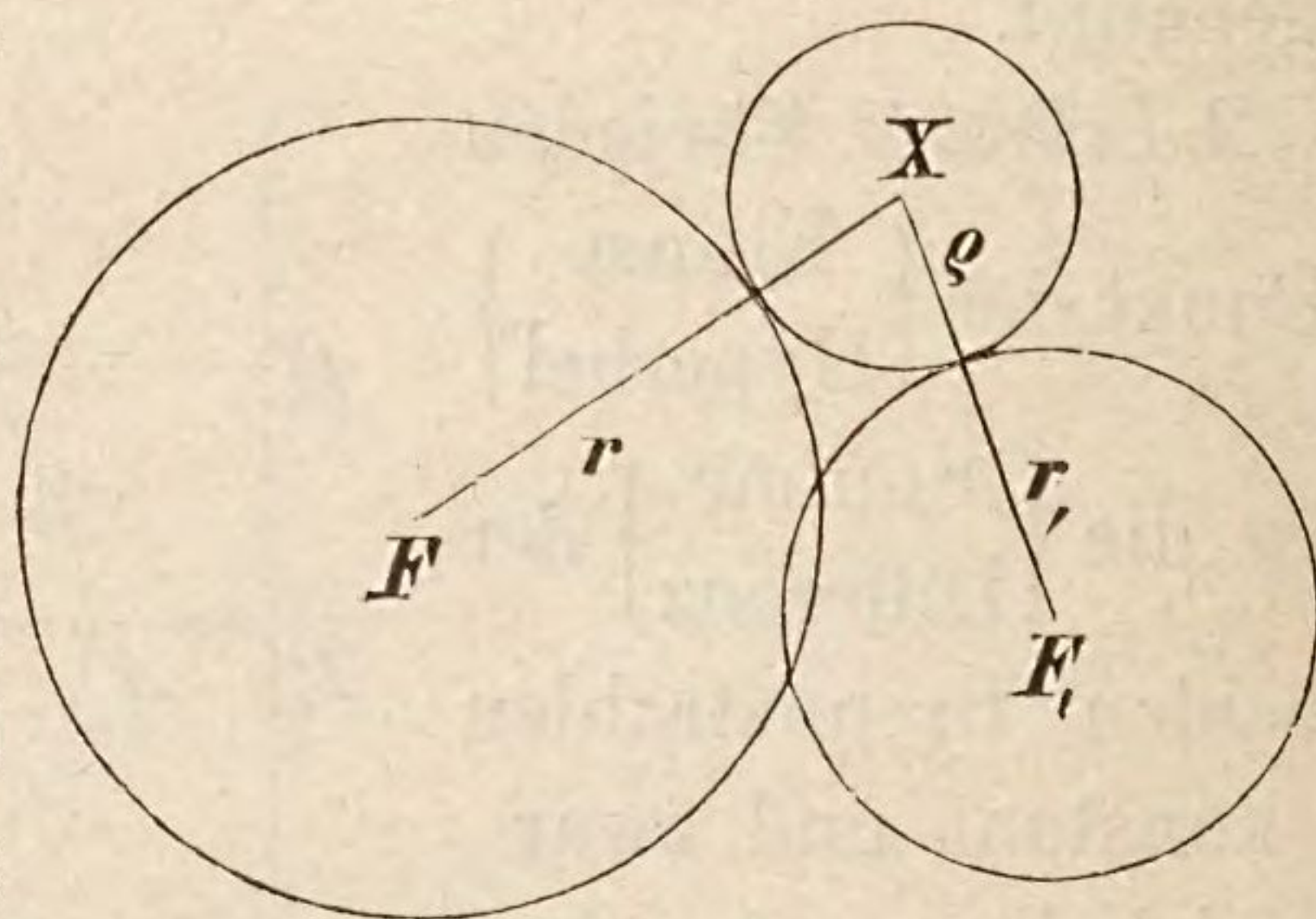


Fig. 7.

und Ellipse; berühren sich die Kreise äußerlich, so geht die Ellipse in die Centrale der ersteren über (die kleine Axe wird gleich Null, die Excentricität gleich der großen Axe); die Hyperbel degeneriert in diesem Falle nur dann in eine Gerade (eigentlich in zwei zusammenfallende Gerade), wenn die Radien der beiden Kreise gleich sind. Berühren sich dagegen die Kreise innerlich, so geht die Hyperbel in die beiden Strecken der Centrale über, welche von den Kreismittelpunkten und dem Punkt im Unendlichen begrenzt werden.

7. Degeneriert der eine der beiden bestimmenden Kreise in einen Punkt, so wird die Ellipse oder die Hyperbel imaginär, je nachdem der Punkt außer- oder innerhalb des andern Kreises liegt; fällt der Punkt dagegen auf die Peripherie, so bilden Ellipse und Hyperbel zusammen eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des Kreises und den gegebenen Punkt geht. Degenerieren beide Kreise in Punkte, so wird die Ellipse imaginär und die Hyperbel geht in die Symmetrieaxe der Punkte über.

8. Degenerieren beide Kreise in sich schneidende Gerade, so geht die Hyperbel in die beiden Symmetrieaxen über, die Ellipse wird ein Punkt (elliptischer Punkt). Sind die Geraden parallel, so ist der eine Hyperbelzweig die Gerade, welche in gleichem Abstände parallel zu den beiden gegebenen ist. Der andre Ast ist die Gerade im Unendlichen; in diesem Falle liegt der elliptische Punkt ebenfalls im Unendlichen.

9. *Definition.* Der Abstand der beiden Brennpunkte der Ellipse und der Hyperbel wird lineare (geometrische) Excentricität oder kurz Excentricität genannt.

(Der Kreis ist eine Ellipse, deren Excentricität 0 ist.)

10. *Lehrsatz.* Das Quadrat der Excentricität in der Ellipse ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Axen.

11. *Definition.* Diejenige Strecke, deren Quadrat zu dem Quadrat der Hauptaxe der Hyperbel addiert das Quadrat der Excentricität ergibt, ist die imaginäre (Neben-) Axe der Hyperbel.

§ 3. Sehnen und Durchmesser.

1. *Definition.* Der Schnittpunkt der beiden Axen bei der Ellipse wird Mittelpunkt genannt; bei der Hyperbel ist der Halbierungspunkt der großen Axe der Mittelpunkt. Jede durch den Mittelpunkt einer der beiden Kurven gehende Sehne wird Durchmesser genannt.

2. *Lehrsatz.* Jeder Durchmesser der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ wird vom Mittelpunkt der Kurve halbiert.

Beweis. Der Durchmesser kann als Diagonale eines Rechtecks betrachtet werden, dessen Ecken paarweise zu der großen und paar-

weise zu der kleinen Axe symmetrisch liegen; daher ist der Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Diagonalen, welche mithin in demselben halbiert werden.

3. Die halbe $\left\{ \begin{array}{l} \text{zu einer der beiden Axen} \\ \text{zu der reellen Hauptaxe} \end{array} \right\}$ senkrecht stehende Sehne der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ steht zu der mittleren Proportionale der beiden von ihr gebildeten Abschnitte der entsprechenden Axe in konstantem Verhältniss; dieses Verhältniss ist gleich dem der beiden Axen.

Beweis. AA_1 (Fig. 8) sei die grofse, BB_1 die kleine Axe einer Ellipse, F und F_1 seien deren Brennpunkte, O der Mittelpunkt, l die Direktrix und X sei ein Punkt der Ellipse. Zieht man nun noch $XQ \perp l$, $XY \perp AA_1$, bezeichnet AO mit a , FO mit e , BO mit b und den konstanten Quotienten mit μ , so ist:

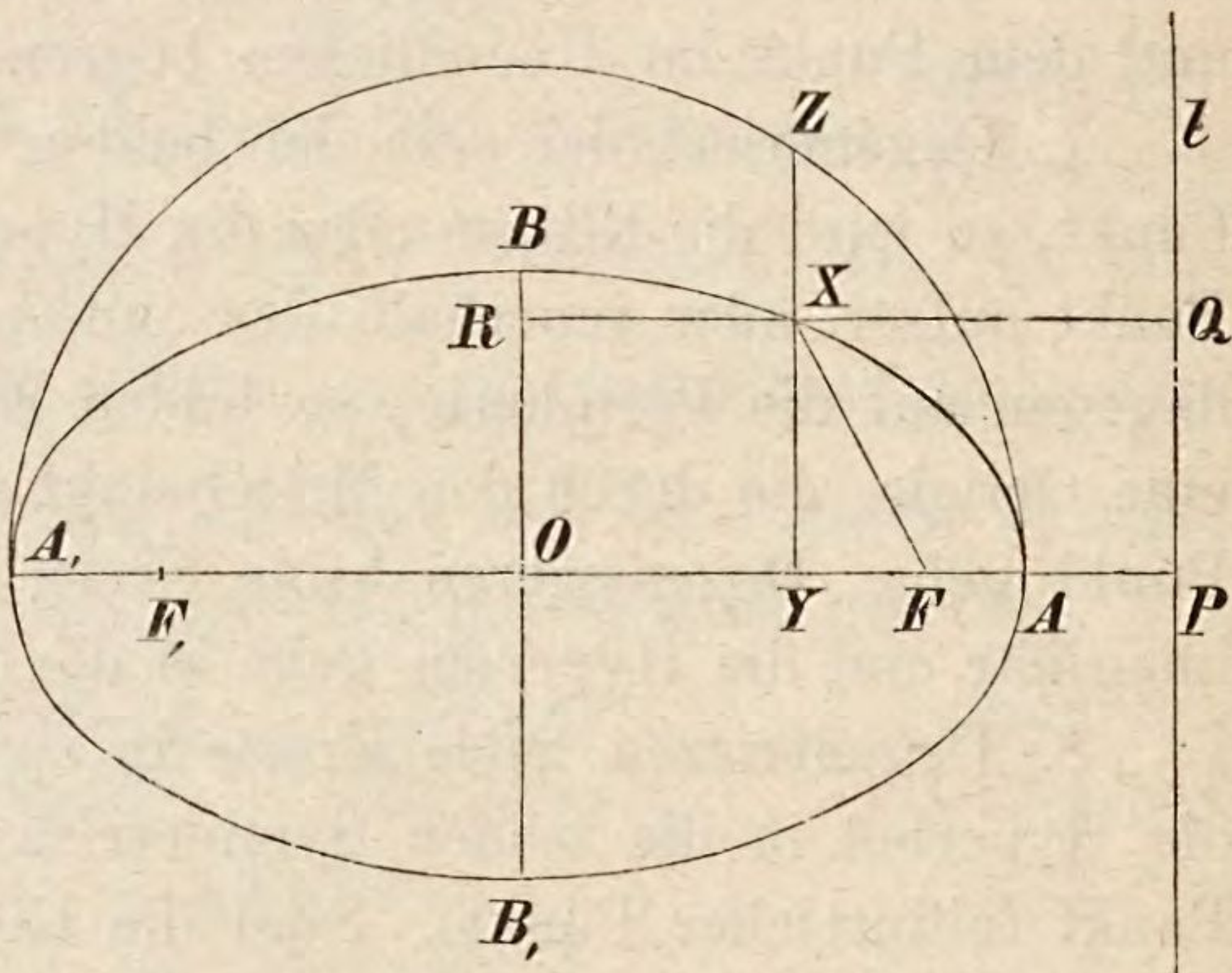


Fig. 8.

$$\frac{XF}{XQ} = \mu$$

$$\begin{aligned} XY &= \sqrt{XF^2 - (e - OY)^2} \\ &= \sqrt{\mu^2 XQ^2 - (e - OY)^2} \\ &= \mu \sqrt{XQ^2 - \frac{1}{\mu^2} (e - OY)^2} \\ &= \mu \sqrt{\left(\frac{a}{\mu} - OY\right)^2 - \frac{1}{\mu^2} (e - OY)^2} \end{aligned}$$

Bedenkt man nun noch, dafs, weil die grofse Axe von Brennpunkt und Leitlinie harmonisch geteilt wird, $\mu a = e$ ist, so ergibt sich durch Umformung des Radikanden:

$$\begin{aligned} XY &= \mu \sqrt{a^2 \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) - OY^2 \left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)} \\ &= \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{a^2 - OY^2} \\ &= \frac{b}{a} \sqrt{(a + OY)(a - OY)}. \end{aligned}$$

Zum Beweise für das Perpendikel auf die kleine Axe verlängere man QX bis zum Schnitte (R) mit der kleinen Axe, so ist:

$$\begin{aligned}
 XR &= \sqrt{OY^2} \\
 &= \sqrt{a^2 - (a^2 - OY^2)} \\
 &= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot XY^2} \\
 &= \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - OR^2} \\
 &= \frac{a}{b} \sqrt{(b + OR)(b - OR)}.
 \end{aligned}$$

Für die Hyperbel ist der Beweis in Bezug auf die reelle Axe derselbe, wie bei der Ellipse für die grofse Axe.

4. Beschreibt man über einer der beiden Axen einer Ellipse als Durchmesser einen Halbkreis, so stehen die zu jedem Punkt der betreffenden Axe gehörigen senkrechten Halbsehn des Kreises und der Ellipse in konstantem Verhältniss; dieser Quotient ist gleich dem aus den beiden Axen der Ellipse.

5. Die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstand von einer Geraden in konstantem Verhältniss zu der mittleren Proportionale der beiden Abschnitte steht, die von dem Perpendikel des Punktes auf einer Strecke der Geraden $\left\{ \begin{array}{l} \text{innerlich} \\ \text{äufserlich} \end{array} \right\}$ gebildet werden.

6. Liegen ähnliche Dreiecke so, dafs die ersten homologen Ecken auf einem Kreise, die zweiten auf einem Durchmesser desselben sich befinden und dafs die zweite Seite zu dem genannten Kreisdurchmesser senkrecht steht, so bilden die dritten Ecken eine Ellipse.

7. Jede Sekante kann die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ höchstens in zwei Punkten schneiden.

Beweis folgt aus Satz 3 und 4 und der Eigenschaft der Kreissekante dafs sie mit dem Kreise nur zwei Punkte gemeinsam haben kann.

8. Alle zu einer Richtung parallelen Sehnen einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ werden von einem Durchmesser halbiert.

Beweis. Es sei AA_1 die grofse, BB_1 die kleine Axe einer Ellipse (Fig. 9), O der Mittelpunkt, PP_1 und QQ_1 seien zwei beliebige parallele Sehnen; dieselben mögen die grofse Axe in den Punkten R und S schneiden. Konstruiert man nun über AA_1 als Durchmesser einen Kreis und fällt von P und P_1 , ebenso von Q und Q_1 die Perpendikel PM , P_1M_1 , QN und Q_1N_1 auf AA_1 und verlängert sie bis zum Schnitte mit dem Kreise, es seien dies bezüglich die Punkte T , T_1 ,

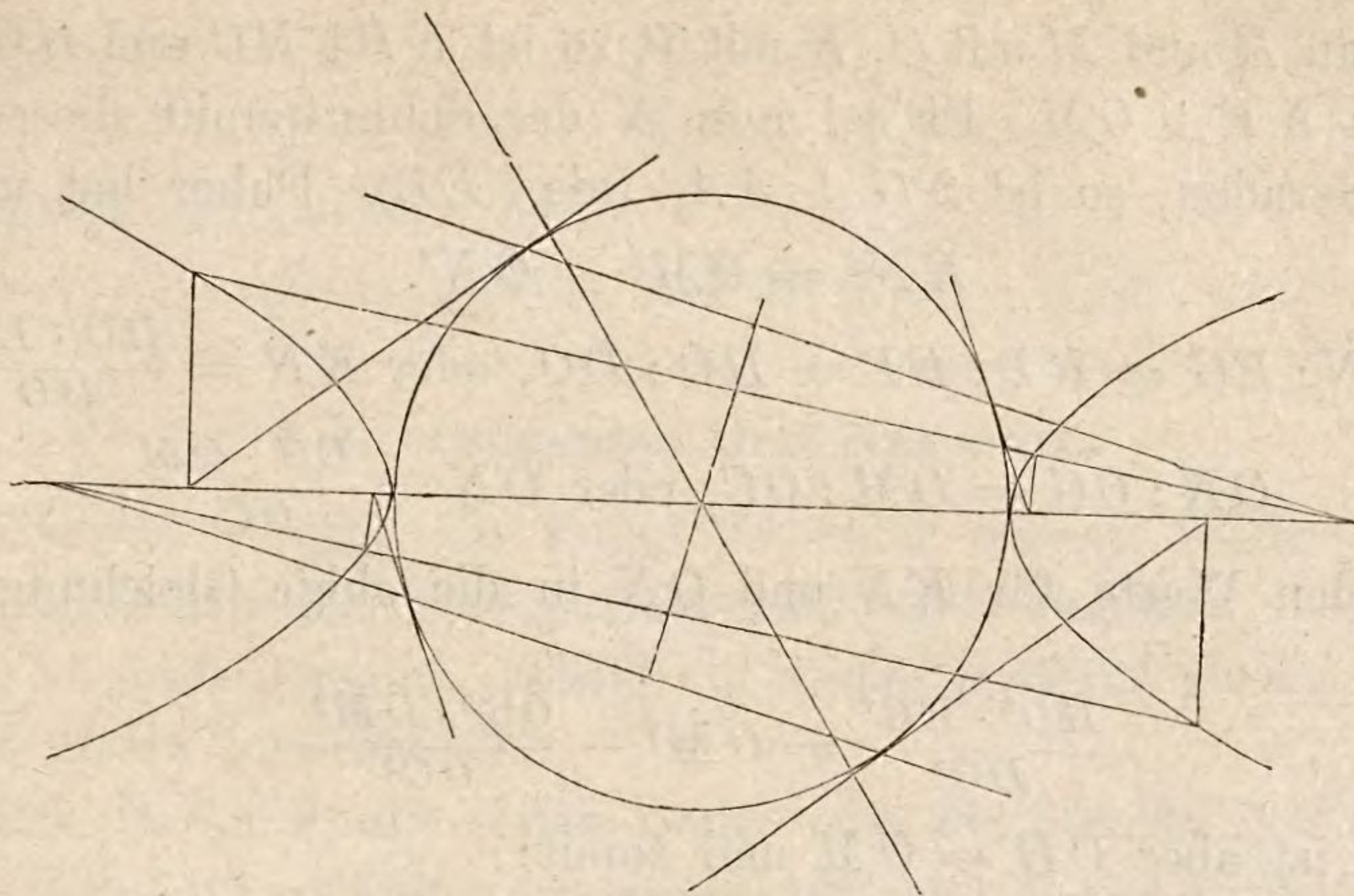


Fig. 10.

schiedenen Räumen der Ebene und schneiden sich nur in ihren Verlängerungen. Daher schneidet stets nur ein Durchmesser von zwei konjugierten die Hyperbel, der andere aber nicht (ist — seiner Länge nach — imaginär).

11. Die $\left\{ \begin{array}{l} \text{große und kleine} \\ \text{Haupt- und Neben-} \end{array} \right\}$ Axe von $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ sind konjugierte Durchmesser.

12. Jede Sehne in der Ellipse teilt den ihrer Richtung konjugierten Durchmesser so, daß die mittlere Proportionale zu den beiden Abschnitten des Durchmessers zu der teilenden Halbsehne in konstantem Verhältnisse steht; dies Verhältniß ist gleich dem Quotienten aus den beiden konjugierten Durchmessern.

Beweis. Es seien in einer Ellipse (Fig. 11) von der großen Axe AA_1 und dem Mittelpunkte O CC_1 und DD_1 zwei konjugierte Durchmesser. Die Sehne EE_1 sei $\parallel DD_1$ und schneide CC_1 in G , die große Axe AA_1 in P . Konstruiert man über der großen Axe einen Halbkreis, fällt von

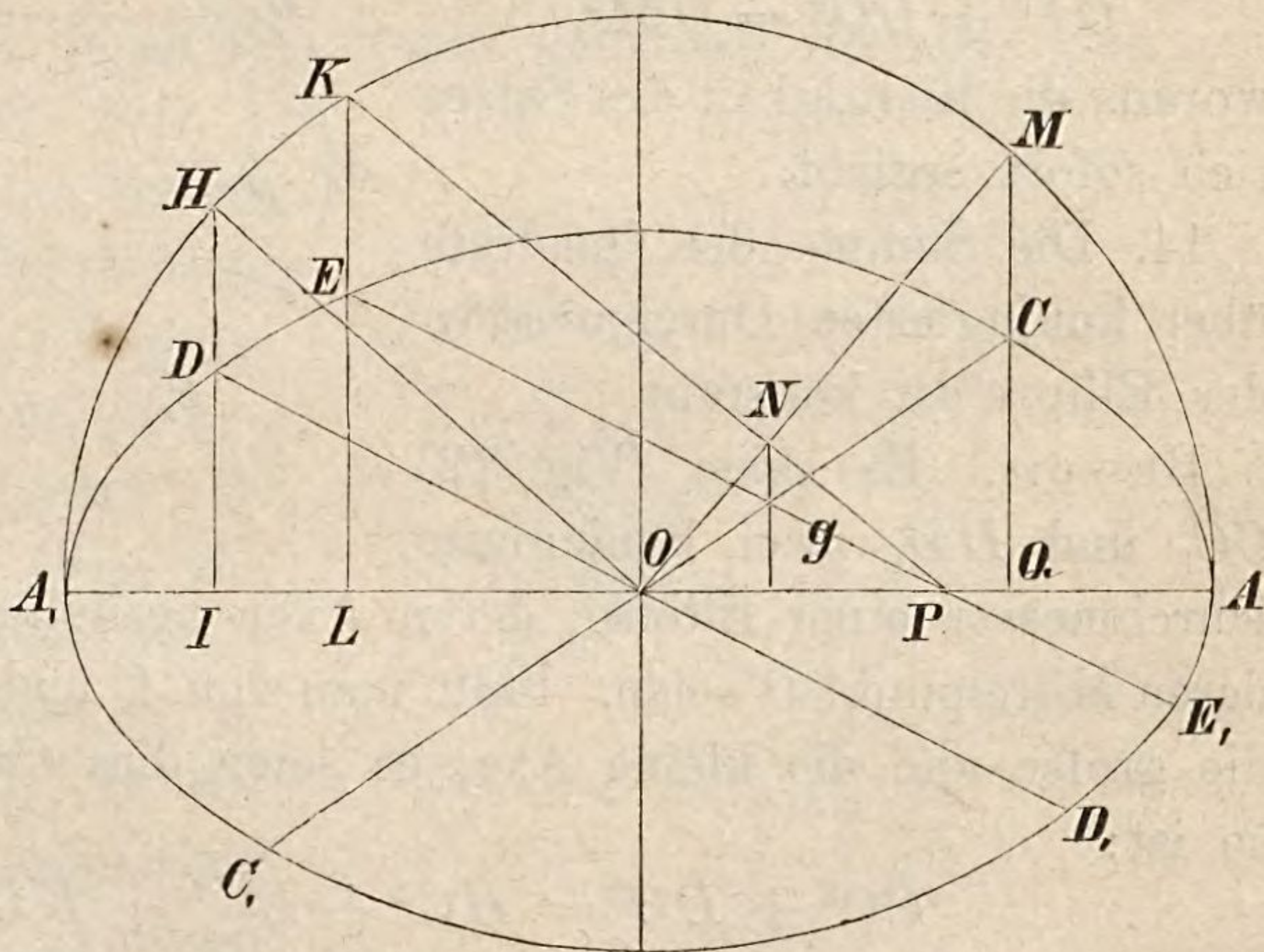


Fig. 11.

D , E und C Perpendikel auf AA_1 , es seien diesbezüglich DI , EL und CQ , welche den Halbkreis in H , K und M treffen mögen; ver-

bindet man H und M mit O , K mit P , so ist $KP \parallel HO$ und $HO \perp OM$, also auch $KP \perp OM$. Es sei nun N der Schnittpunkt dieser beiden letztern Geraden, so ist $NG \perp AA_1$ (als $\parallel EL$). Daher hat man:

$$KN^2 = OM^2 - ON^2.$$

$$KN:EG = KP:EP = HO:DO, \text{ oder } KN = \frac{HO \cdot EG}{DO},$$

$$ON:OG = OM:OC, \text{ oder } ON = \frac{OG \cdot OM}{OC};$$

diese beiden Werte für KN und ON in die obige Gleichung gesetzt ergibt:

$$\frac{HO^2 \cdot EG^2}{DO^2} = OM^2 - \frac{OG^2 \cdot OM^2}{OC^2}.$$

Nun ist aber $OH = OM$ und somit:

$$\frac{EG^2}{OD^2} = \frac{OC^2 - OG^2}{OC^2} = \frac{GC \cdot GC_1}{OC^2},$$

oder

$$\frac{\sqrt{GC \cdot GC_1}}{GE} = \frac{OC}{OD}, \text{ q. e. d.}$$

13. Die Summe der Quadrate der Projektionen zweier konjugierter Durchmesser einer Ellipse auf jede der Axen ist konstant und zwar gleich dem Quadrate über der großen Axe.

Beweis. Es seien (Fig. 11) CC_1 und DD_1 zwei konjugierte Durchmesser, OQ und OI die Projektionen der Halbmesser auf die große Axe AA_1 , so sind es auch die Projektionen der zugehörigen Kreishalbmesser OM und OH , welche senkrecht zu einander stehen; somit ist:

$$OI^2 + OQ^2 = OM^2,$$

woraus die Richtigkeit des Satzes sich sofort ergibt.

14. Die Summe der Quadrate über konjugierten Durchmessern der Ellipse ist konstant.

Beweis. Es seien (Fig. 12) CC_1 und DD_1 zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse, deren Axen bezüglich AA_1 und BB_1 und deren Mittelpunkt O seien. Fällt man von C und D die Perpendikel auf die große und die kleine Axe, es seien dies CL , CH , DK und DG , so ist:

$$\begin{aligned} CO^2 + DO^2 &= HC^2 + LC^2 + KD^2 + GD^2 \\ &= OL^2 + OH^2 + OK^2 + OG^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Satze:

$$LO^2 + KO^2 = AO^2,$$

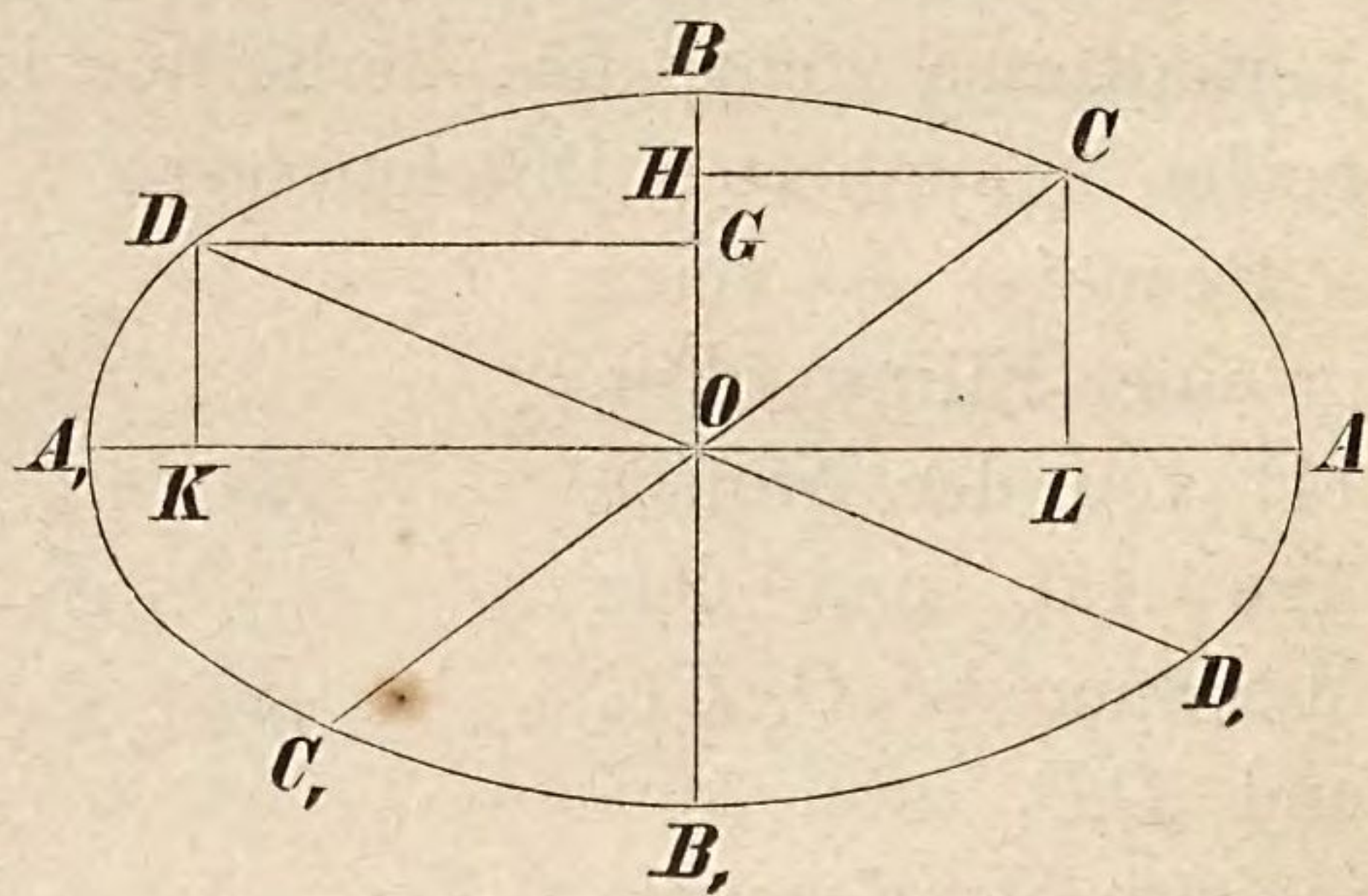


Fig. 12.

und in gleicher Weise:

$$GO^2 + HO^2 = BO^2;$$

daher ergibt sich leicht:

$$CO^2 + DO^2 = AO^2 + BO^2, \text{ q. e. d.}$$

§ 4. Tangenten und Normalen.

1. *Theorem.* Liegt ein Punkt in einer ebenen Figur auf einer (geraden, krummen oder gebrochenen) Linie stets zwischen zwei anderen Punkten, so muß derselbe, sobald die beiden letzteren zusammenfallen, auch mit diesen koincidieren.

[Soll z. B. der Punkt C den Bogen oder die Strecke AB halbieren, und fällt B auf A , so fällt auch gleichzeitig mit B der Punkt C auf A .]

2. *Definitionen.* Fallen bei einer Sekante zwei Schnittpunkte mit der Kurve in einen Punkt zusammen, so geht die Sekante in eine Tangente in diesem Punkte über; der Punkt, welcher dieser Geraden und der Kurve gemeinsam ist, ist ein Doppelpunkt und wird Berührungs- oder Taktionspunkt genannt. Das Perpendikel auf der Tangente im Berührungspunkte heißt Normale. Unter Tangente und Normale, als Längen betrachtet, versteht man bei der Ellipse und Hyperbel die zwischen dem Berührungspunkte der Kurve und der großen Axe gelegenen Stücke der betreffenden Geraden. Subtangente und Subnormale werden die Projektionen der Tangente und Normale (ihrer Länge nach) auf die große Axe genannt.

3. *Lehrsatz.* Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel halbiert den Winkel der beiden durch den Punkt gehenden Brennstrahlen.

Beweis. Nach § 2, Satz 5 können wir uns die Hyperbel erzeugt denken durch den Mittelpunkt eines beweglichen Kreises, der zwei festliegende Kreise berührt. Die letzteren seien die Kreise um F und F_1 (Fig. 13) und X und Y seien zwei Kreise, welche die beiden ersteren in A , A_1 , bezüglich in B , B_1 berühren, und die sich gegenseitig in C und C_1 schneiden. Alsdann

ist XY Sekante der Hyperbel und als Centrale zweier Kreise $\perp CC_1$. XF und XF_1 sind die beiden Brennstrahlen des Punktes X und gehen durch A bezüglich A_1 . Nähert man nun Y (auf der Hyperbel) dem

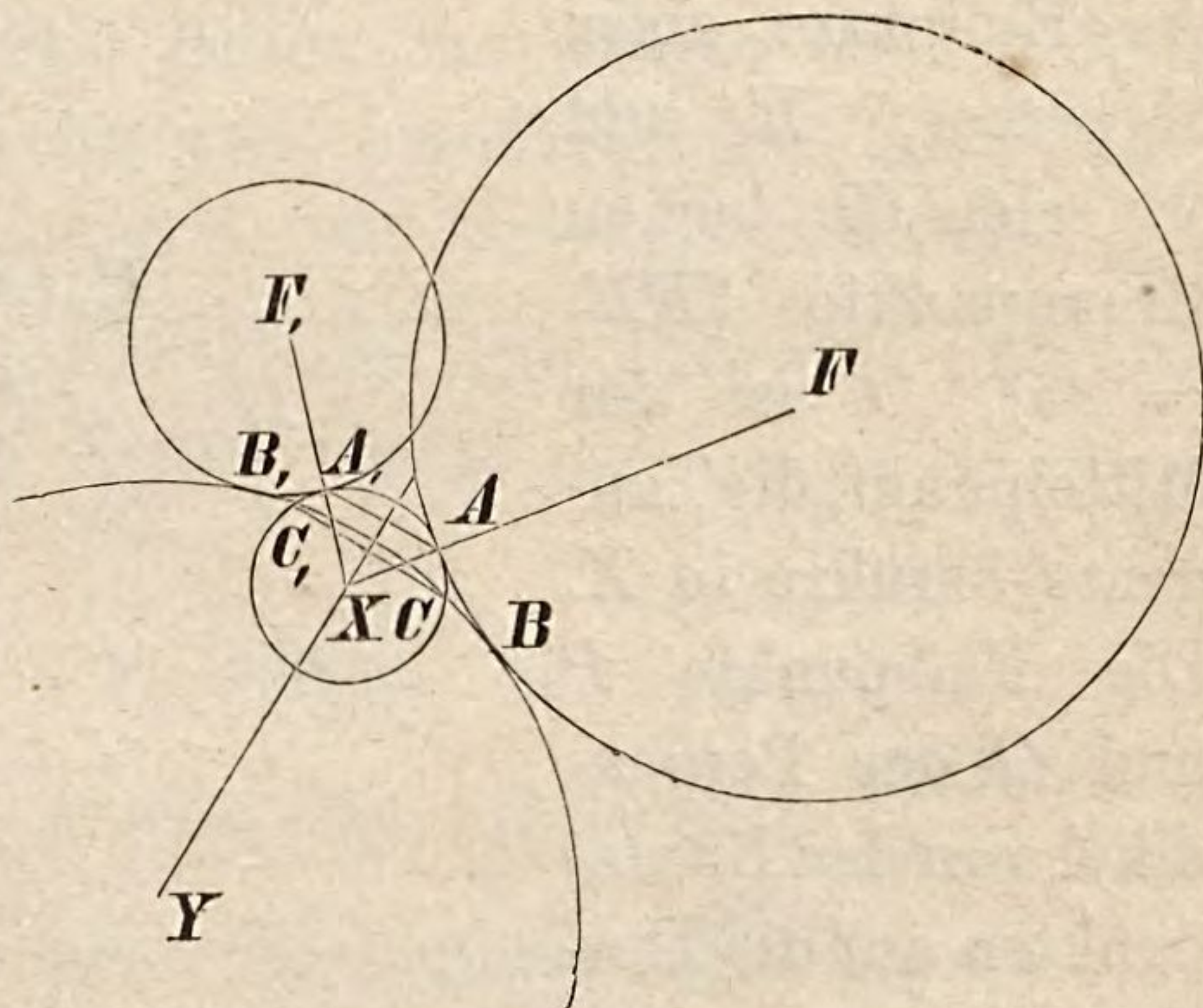


Fig. 13.

Punkte X , so nähert sich gleichzeitig B dem Punkte A und B_1 dem Punkte A_1 . C muß jedoch als Schnittpunkt der beiden Kreise X und Y stets zwischen A und B liegen, ebenso C_1 zwischen A_1 und B_1 . Fällt nun Y auf X , so ist YX ein Doppelpunkt, die Sekante geht in eine Tangente über, B und mit ihm gleichzeitig C fällt auf A , B_1 und C_1 auf A_1 , die Tangente XY , welche $\perp AA_1 (\equiv CC_1)$ ist, halbiert daher $\angle FXF_1$, q. e. d.

4. Die Normale in einem Punkte einer Ellipse halbiert den Winkel der beiden Brennstrahlen.

Der Beweis ist dem des vorigen Satzes vollständig entsprechend.

5. In jedem Punkte von Ellipse und Hyperbel giebt es stets eine und nur eine Tangente; in den Scheiteln steht sie zu der betreffenden Axe senkrecht.

6. Die Fußpunkte der Perpendikel von einem Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel auf die Tangenten an genannter Kurve liegen auf einem Kreise, der um den Mittelpunkt der Kurve mit der halben großen Axe gezogen wird.

Der Beweis beruht auf dem Satze § 2, No. 5 und auf dem Satze vom Kreise: Halbiert man die Abschnitte aller Sekanten (Sehnen), die durch einen Punkt gehen, so liegen die Halbierungspunkte auf einem Kreise.

7. Das Rechteck aus den Perpendikeln von den Brennpunkten auf eine Tangente einer Hyperbel ist konstant (gleich dem Quadrate der Nebenaxe).

Beweis. Es sei (Fig. 14) $AA_1 (= 2a)$ die Hauptaxe einer Hyperbel, F und F_1 seien die beiden Brennpunkte ($FF_1 = 2e$), O sei der Mittelpunkt, die Tangente berühre in X . Die Fußpunkte P und Q der Perpendikel von den Brennpunkten auf die Tangente liegen nach dem vorhergehenden Satze auf einem Kreise um O mit OA als Radius. F_1Q schneide diesen Kreis in S , so ist $FP = F_1S$, daher

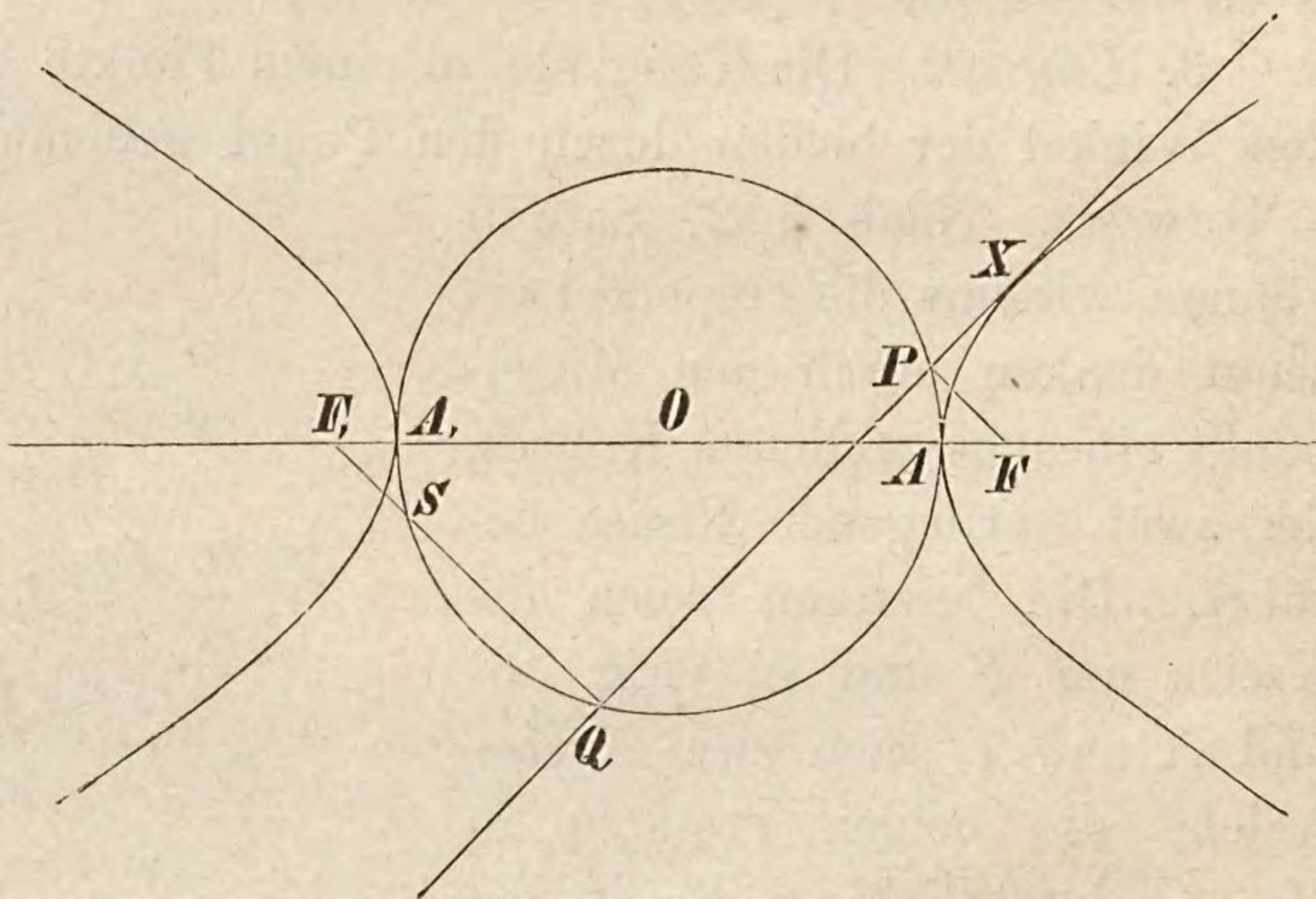


Fig. 14.

gente liegen nach dem vorhergehenden Satze auf einem Kreise um O mit OA als Radius. F_1Q schneide diesen Kreis in S , so ist $FP = F_1S$, daher

$$\begin{aligned} FP \cdot F_1Q &= F_1S \cdot F_1Q = F_1A \cdot F_1A_1 \\ &= F_1O^2 - AO^2 = e^2 - a^2 = b^2, \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

8. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ sind parallel dem zu letzterem konjugierten Durchmesser.

9. Zieht man von einem Punkte einer Axe Tangenten an alle Ellipsen, welche diese Axe gemeinsam haben, so sind die zugehörigen Subtangenten alle einander gleich.

Beweis. Nach § 3, Satz 8 liegen die Berührungspunkte aller Tangenten, die man von demselben Punkt der Axe an alle über diese letztere konstruierte Ellipsen ziehen kann, auf einem Perpendikel zu der genannten Axe; daher sind die Subtangenten alle gleich.

9^a. Die Subtangenten aller Hyperbeln von gemeinsamer Hauptaxe sind für diejenigen Punkte gleich, die auf einer zur Axe senkrechten Geraden liegen.

10. Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ schneiden sich in einem Punkte des Durchmessers, der zu der Richtung der Sehne der konjugierte ist.

11. Von jedem Punkte außerhalb einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ kann man zwei Tangenten an die Kurve ziehen und die Verbindungslinie der Berührungspunkte wird von dem durch den ersten Punkt gehenden Durchmesser halbiert.

12. Zieht man zwei Tangenten, so schneiden dieselben auf jeder Sehne, welche parallel zu der Verbindungslinie der Taktionspunkte ist, zwei gleiche Stücke ab.

13. Das Parallelogramm, dessen Seiten eine Ellipse in den Endpunkten zweier konjugierter Durchmesser berühren, hat einen konstanten Inhalt, ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Axen.

14. Der Inhalt einer Ellipse ist gleich dem Produkte aus den beiden Axen multipliziert mit der Verhältniszahl π .

§ 5. Pol und Polare.

1. *Definition.* Zwei Punkte, welche eine Sehne einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ harmonisch teilen, werden zugeordnete (konjugierte) Pole genannt.

2. *Lehrsatz.* Jeder Brennpunkt einer $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ und der entsprechende Schnittpunkt der Direktrix mit der großen Axe sind zugeordnete Pole.

3. Zu jedem Punkt eines Durchmessers ist der Schnittpunkt der Tangenten, welche man in den Endpunkten der durch ersteren gehenden konjugierten Sehne ziehen kann, der konjugierte Pol.

Beweis. X sei ein Punkt des Durchmessers DD_1 einer Ellipse (Fig. 15); man konstruiere um den Mittelpunkt O mit der halben großen Axe als Radius einen Kreis und ziehe die zu DD_1 konjugierte Sehne BC , fälle die Perpendikel BQ , XP , CR , zeichne die entsprechende Kreissehne B_1C_1 (deren Mittelpunkt X_1 ist), und ziehe den Radius OX_1 , dessen Verlängerung von den Tangenten in B_1 und C_1 in dem Punkte Y_1 geschnitten werde. Ist

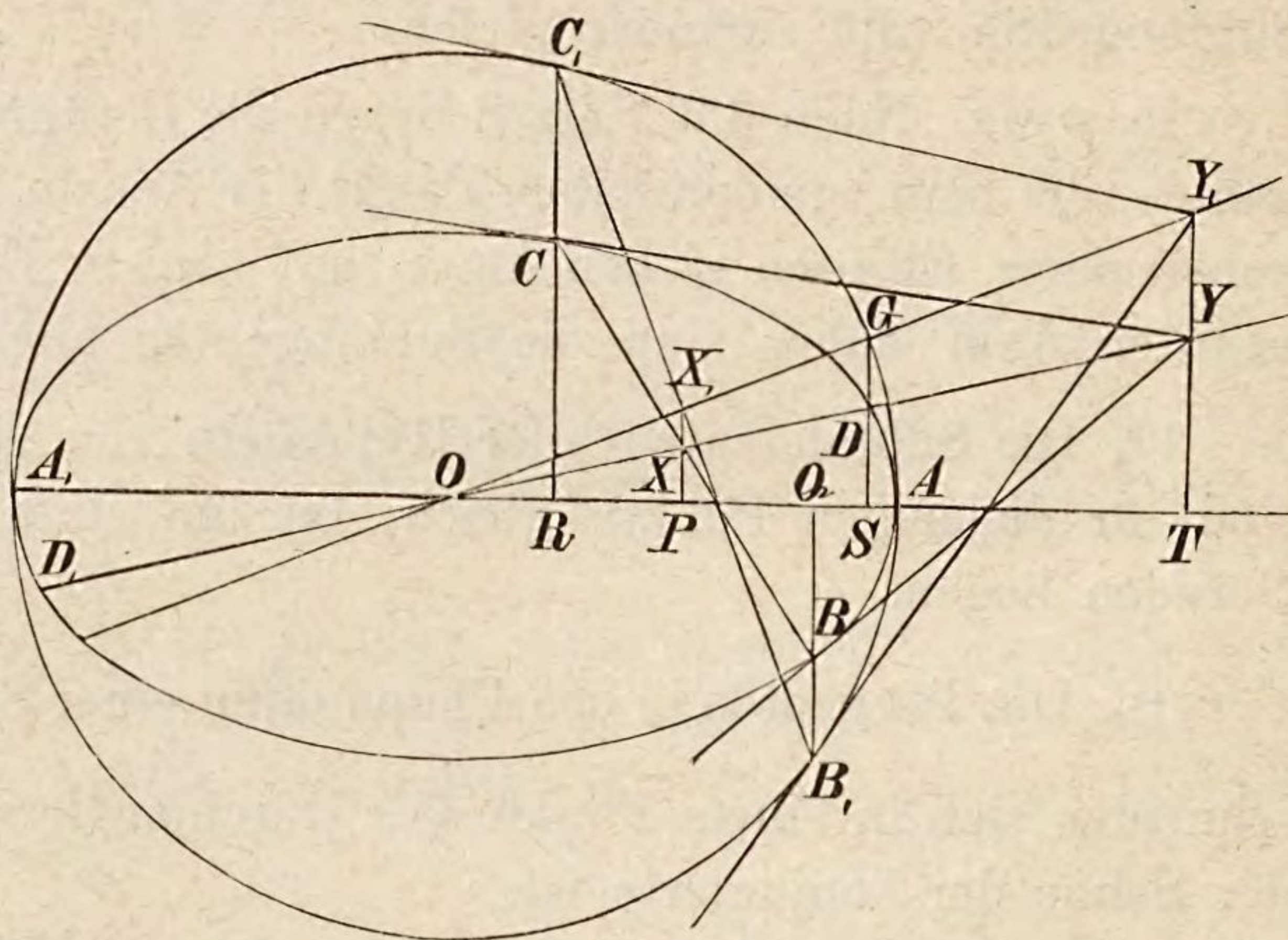


Fig. 15.

nun noch $Y_1T \perp AA_1$, so liegt Y_1 der Schnittpunkt der Tangenten der Ellipse in B und C mit OX auf Y_1T u. s. f.

4. Die zugeordneten Pole zu den Halbierungspunkten aller durch einen Punkt der großen Axe einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ gehenden Sehnen liegen auf einer zu der gen. Axe senkrechten Geraden.

Beweis s. 3.

5. Errichtet man in einem beliebigen Punkte der $\left\{ \begin{array}{c} \text{einen} \\ \text{Haupt-} \end{array} \right\}$ Axe einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ein Perpendikel auf dieser Axe, so wird jede Sehne, welche durch den dem Fußpunkte des Perpendikels zugeordneten Pol geht, von diesem Pole und der Geraden harmonisch geteilt.

6. *Definition.* Jede Linie, welche die durch einen Punkt $\left\{ \begin{array}{c} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{array} \right\}$ einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ gehenden Sehnen im vierten harmonischen Punkte schneidet, wird Polare zu dem Punkte und der Punkt Pol zu der Linie genannt.

7. *Lehrsatz.* Die Polare des Brennpunktes einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ist die zugehörige Direktrix und umgekehrt.

8. Die Polare eines Punktes $\left\{ \begin{array}{c} \text{einer} \\ \text{der Haupt-} \end{array} \right\}$ Axe einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ ist das Perpendikel, welches man auf der Axe in dem dem Punkte zugeordneten Pole errichtet.

9. Die zugeordneten Pole aller Geraden, die durch einen Punkt innerhalb oder ausserhalb einer $\left\{ \begin{array}{c} \text{Ellipse} \\ \text{Hyperbel} \end{array} \right\}$ gehen, liegen auf einer Geraden, welche zu jenem Punkte die zugeordnete Polare ist.

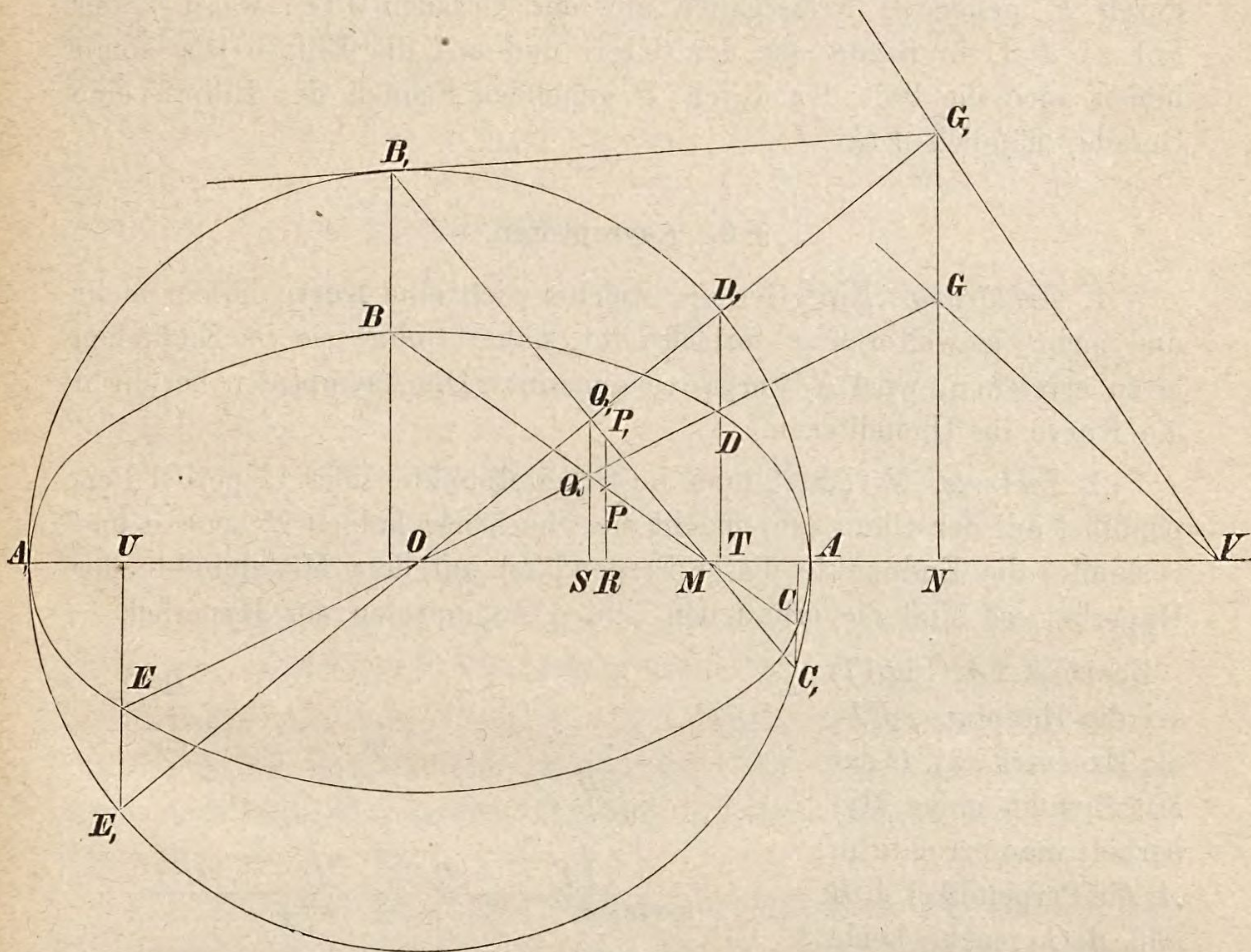


Fig. 16.

Beweis. Es sei (Fig. 16) P ein beliebiger Punkt innerhalb der Ellipse, deren grosse Axe AA_1 , deren Mittelpunkt O und deren beide Halbaxen a und b sind. BC sei eine beliebige durch P gehende Sehne. Beschreibt man um O mit a einen Kreis, fällt von B und C Perpendikel auf AA_1 , dieselben mögen den Kreis in B_1 und C_1 schneiden, verbindet dann B_1 mit C_1 , so schneiden sich AA_1 , BC und B_1C_1 in einem Punkte M ; fällt man nun noch das Perpendikel PR auf AA_1 und verlängert es bis zu dem Schnitte mit der Kreissehne B_1C_1 , dies sei der Punkt P_1 , so gehen alle Kreissehnen, welche sich mit den durch P gehenden Ellipsensehnen in einem Punkte der grossen

Axe schneiden, durch diesen Punkt P_1 . Es seien nun Q und Q_1 die Halbierungspunkte der Sehnen BC und B_1C_1 , also

$$Q_1QS \perp AA_1, \frac{Q_1S}{QS} = \frac{P_1R}{PR} = \frac{D_1T}{DT} = \frac{a}{b},$$

wo DE bezügl. D_1E_1 konjugierter Durchmesser zu BC bezügl. B_1C_1 . Ist nun G_1 der Pol zu B_1C_1 und G der zu BC , so muß offenbar $G_1G \perp AA_1$ und ebenfalls $\frac{G_1N}{GN} = \frac{a}{b}$ sein. Nun liegen die Pole aller durch P_1 gehenden Kreissehnen auf der Geraden VG_1 , wenn V der Pol zu P_1R in Bezug auf den Kreis und auf die Ellipse ist; somit bilden auch die Pole der durch P gehenden Sehnen der Ellipse eine Gerade, nämlich VG .

§ 6. Asymptoten.

1. *Erklärung.* Eine Gerade, welcher sich eine Kurve immer mehr und mehr, je weiter man fortschreitet, nähert, ohne sie im Endlichen je zu erreichen, wird Asymptote genannt. Die Asymptoten berühren die Kurve im Unendlichen.

2. *Lehrsatz.* Errichtet man im Scheitelpunkte einer Hyperbel Perpendikel auf der Hauptaxe, macht sie gleich der halben Nebenaxe und verbindet die Endpunkte dieser Perpendikel mit dem Mittelpunkt der Hyperbel, so sind die erhaltenen Linien Asymptoten der Hyperbel.

Beweis. AA_1 (Fig. 17) sei die Hauptaxe, FF_1 die Excentricität, O der Mittelpunkt einer Hyperbel; man errichte in A_1 die Perpendikel A_1B und A_1C , mache beide gleich der halben Nebenaxe — indem man um O mit OF_1 einen Kreis schlägt — und ziehe die Geraden OB und OC .

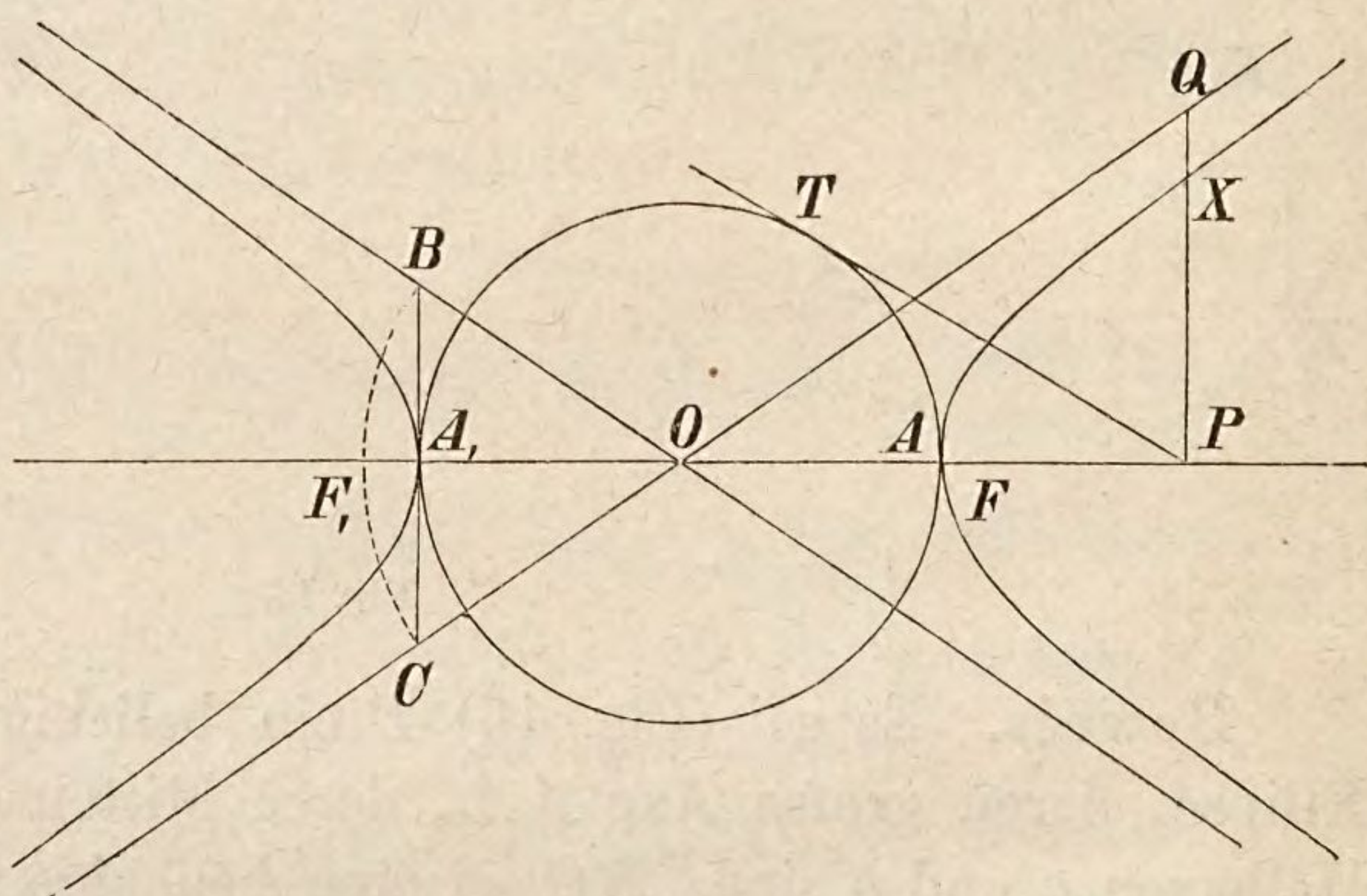


Fig. 17.

Fällt man alsdann von einem Punkte X auf die Hauptaxe ein Perpendikel, es sei XP — es schneide OC in Q —, und zieht man von dessen Fußpunkt die Tangente PT an den Kreis um O mit OA als Radius, so ist $\frac{XP}{PT} = \frac{BA_1}{OA_1}$. Nun ist stets $PT < PO$, der Quotient $\frac{PT}{PO} < 1$, nähert sich aber um so mehr der Einheit, je größer PO wird;

gleichzeitig damit aber nähert sich $\frac{XP}{PT}$ immer mehr und mehr dem Werte $\frac{XP}{OP}$, d. h. XP nähert sich je weiter P von O entfernt ist, um so mehr QP oder $XP - QP$ wird $= 0$, wenn P unendlich weit entfernt ist.

3. *Erklärungen.* Hyperbeln, welche gemeinsame Asymptoten haben und bei denen die Hauptaxe der einen die Nebenaxe der andern ist (die also gleiche Excentricität besitzen), werden konjugierte Hyperbeln genannt. Ist die Hauptaxe gleich der Nebenaxe, stehen also die beiden Asymptoten senkrecht zu einander, so werden die von ihnen eingeschlossenen Hyperbeln gleichseitige genannt.

4. *Lehrsatz.* Zieht man in den Scheitelpunkten zweier konjugierter Hyperbeln Tangenten, so sind die Diagonalen des hierdurch erzeugten Rechtecks die gemeinschaftlichen Asymptoten.

5. Zieht man durch einen Punkt einer Hyperbel eine beliebige Gerade, so sind die beiden zwischen den Schnittpunkten mit der Hyperbel und den Schnittpunkten mit den Asymptoten gelegenen Strecken einander gleich.

Beweis. Die beiden Tangenten vom Mittelpunkte O an eine Hyperbel sind die Asymptoten, daher folgt die Richtigkeit des Satzes aus § 4, Satz 12.

5^a. *Zusatz.* Die Abschnitte einer Tangente zwischen Berührungspunkt und Schnittpunkt der Asymptoten sind einander gleich.

6. Fällt man von einem Punkte einer Hyperbel ein Perpendikel auf die grofse Axe, so ist das Rechteck aus den durch die Asymptoten gebildeten Abschnitten desselben konstant (gleich dem Quadrate der halben Nebenaxe).

Beweis. Es sei P ein Punkt einer Hyperbel von den beiden Halbaxen a und b und dem Mittelpunkte O . Das Perpendikel PN auf die Hauptaxe AA_1 schneide die beiden Asymptoten OC und OC_1 in Q und Q_1 , so ist

$$PQ \cdot PQ_1 = (QN + PN) (QN - PN) = QN^2 - PN^2 = ON^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} - (ON^2 - OA^2) \cdot \frac{b^2}{a^2} = b^2.$$

Zusatz 1: Die zwischen den Asymptoten und der Hyperbel gelegenen Abschnitte einer Sekante sind einander gleich (cfr. 5).

Zusatz 2: Die Abschnitte einer Tangente an eine Hyperbel vom Berührungspunkte bis zu den Schnittpunkten mit den Asymptoten sind einander gleich (cfr. 5^a).

7. Zieht man durch einen Punkt einer Hyperbel Parallele zu den beiden Asymptoten, so werden durch letztere solche Stücke abgeschnitten, daß das Rechteck aus den beiden Stücken konstant ist.

Beweis. Es sei (Fig. 18) O der Mittelpunkt, A der Scheitelpunkt, P ein beliebiger Punkt der Hyperbel, $PQ \parallel OD \parallel AG$, $PR \parallel OS$, $SPS_1 \perp OA$. Es ist alsdann

$$PQ : PS = AG : AB$$

$$PR : PS_1 = AG : AB$$

$$PQ \cdot PR : b^2 = AG^2 : AB^2$$

$$PQ \cdot PR = \frac{AG^2 \cdot b^2}{AB^2} = AG^2, \text{ q. e. d.}$$

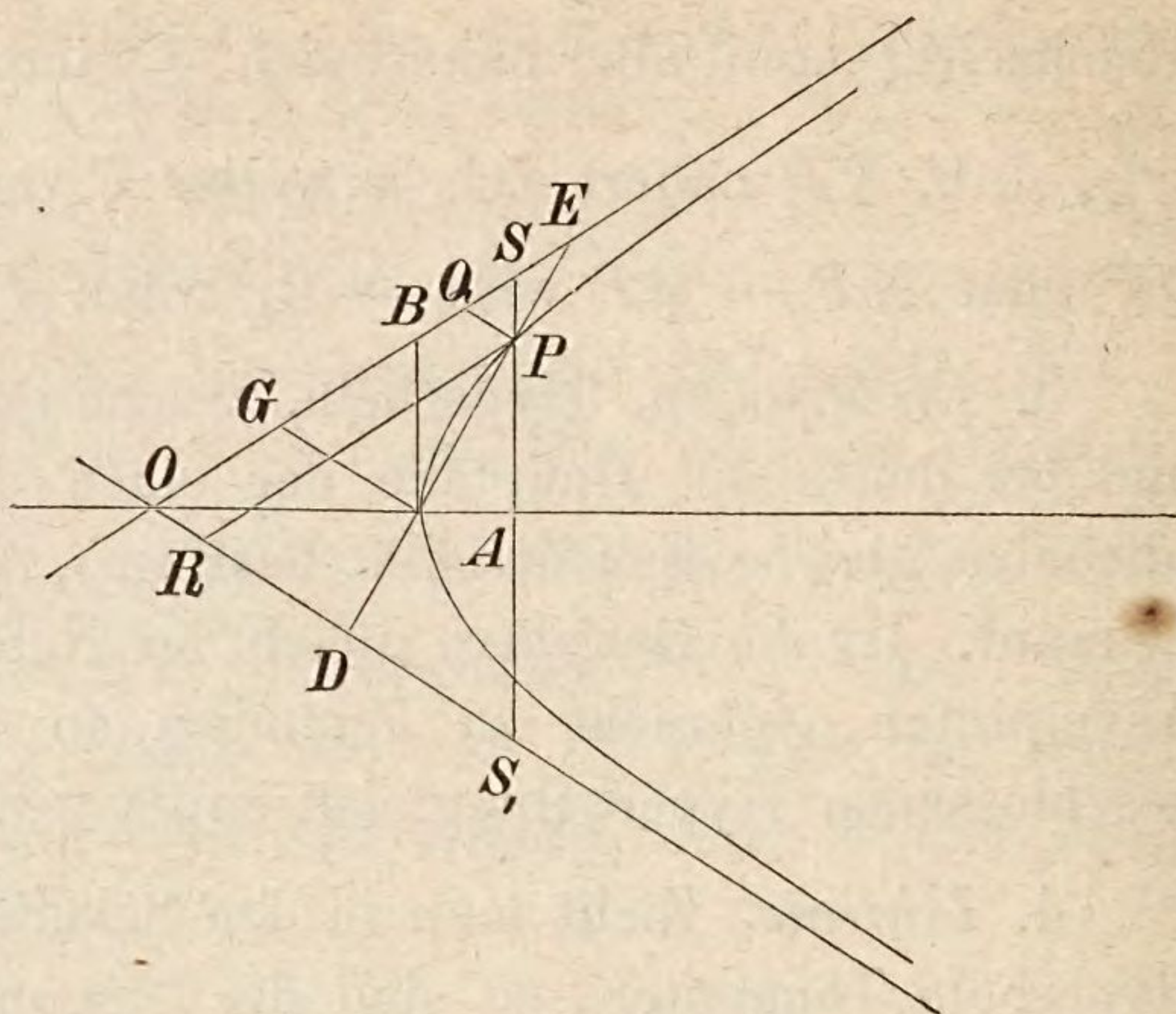


Fig. 18.

8. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel schneidet auf jeder Asymptote Stücke ab, welche durch die Gerade halbiert werden, die man durch den Taktionspunkt parallel je zu der zweiten Asymptote zieht.

9. Zieht man von einem Punkte einer Asymptote Tangenten an zwei konjugierte Hyperbeln, so sind dieselben für beide Hyperbeln konjugierten Durchmessern parallel und umgekehrt.

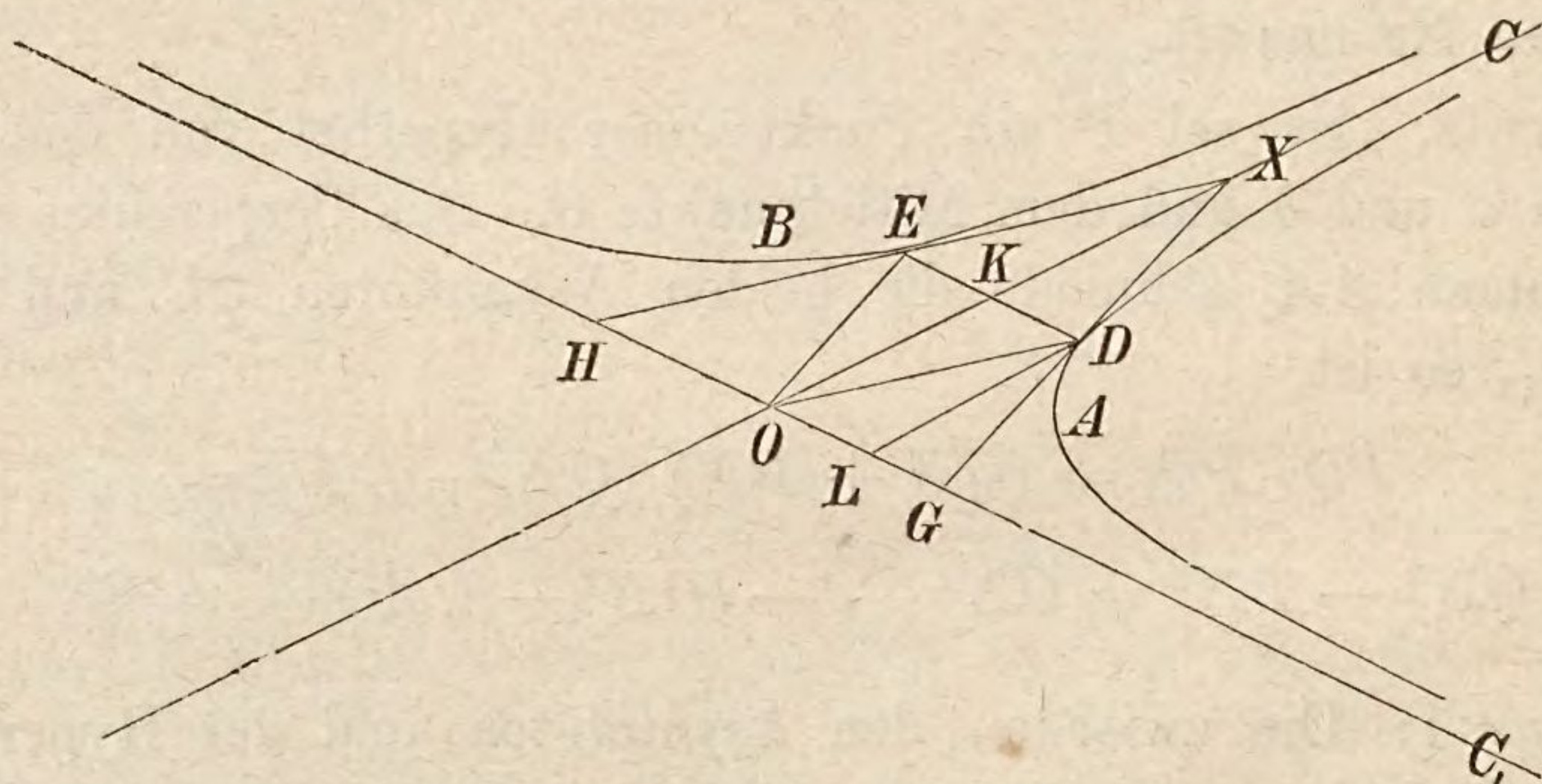


Fig. 19.

Beweis. Es seien (Fig. 19) OC und OC_1 die beiden Asymptoten zweier konjugierter Hyperbeln; zieht man alsdann von einem Punkte X der einen (OC) Tangenten an die beiden konjugierten Hy-

perbeln, es seien XG und XH , sie mögen in den Punkten D und E berühren und die zweite Asymptote in G und H schneiden, so ist $XD = DG$, $XE = EH$ und daher OE , der zu der Richtung XH konjugierte Durchmesser, $\parallel XG$ und ebenso $OD \parallel XH$.

10. Das Parallelogramm, welches gebildet wird durch die Tangenten in den Endpunkten der konjugierten Durchmesser zweier konjugierter Hyperbeln, ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Axen.

Beweis. Zieht man in der vorigen Figur noch $DL \parallel CO$, so ist $OL = LG = DK$, wenn K der Schnittpunkt von OC mit DE ist. Das Parallelogramm aus den Tangenten XH und XG ist $= 2 \cdot \triangle XHG = 4 \cdot \triangle XOG = 8 \cdot OLDK = 8 \cdot DK \cdot DL \cdot \sin COC_1 = 4 \cdot ab$, wo a und b die beiden Halbaxen sind.

II. Abschnitt.

Parabel.

§ 7. Brennpunkt, Direktrix, Axe, Durchmesser.

1. *Erklärung.* Der geometrische Ort des Punktes, dessen Abstände von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden einander gleich sind, wird Parabel genannt. Der festliegende Punkt heisst Brennpunkt (Focus), die gegebene Gerade Leitlinie (Direktrix).

2. *Lehrsatz.* Das Perpendikel vom Brennpunkte auf die Leitlinie schneidet die Parabel in einem Punkte und wird von diesem halbiert.

3. *Erklärung.* Die Gerade, welche durch den Brennpunkt einer Parabel geht und senkrecht zu der Direktrix steht, wird Axe genannt; der Schnittpunkt der Axe mit der Parabel heisst Scheitel. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit einem Punkte der Parabel wird Brennstrahl genannt.

4. *Lehrsatz.* Die Axe teilt die Parabel symmetrisch.

5. Die Parabel liegt ganz auf einer Seite des im Scheitelpunkte auf der Axe errichteten Perpendikels und besteht aus einem offenen Aste.

6. Der Quotient aus den Abständen eines Punktes in der Ebene von Brennpunkt und Direktrix einer Parabel ist $\begin{cases} \text{größer} \\ \text{gleich} \\ \text{kleiner} \end{cases}$ als die Ein-

heit, wenn der Punkt $\begin{cases} \text{außerhalb} \\ \text{auf} \\ \text{innerhalb} \end{cases}$ der Parabel liegt.

der feste Kreis in einen Punkt über, so wird die gegebene Gerade Direktrix.

11. Die im Brennpunkte auf der Axe senkrecht stehende Sehne der Parabel ist gleich der doppelten Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie.

12. *Erklärung.* Die in dem Brennpunkte zur Axe senkrecht stehende Sehne der Parabel wird Parameter genannt.

13. *Lehrsatz.* Die halbe zur Axe senkrechte Sehne der Parabel ist mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und dem Abstand der Sehne vom Scheitel.

Beweis. F sei (Fig. 21) Brennpunkt, A Scheitel, also AF Axe, ferner sei RD Direktrix der Parabel, P ein beliebiger Punkt derselben. Fällt man $PQ \perp AF$ und $PR \perp DR$ und verbindet P mit F , so ist $PF = PR$; daher

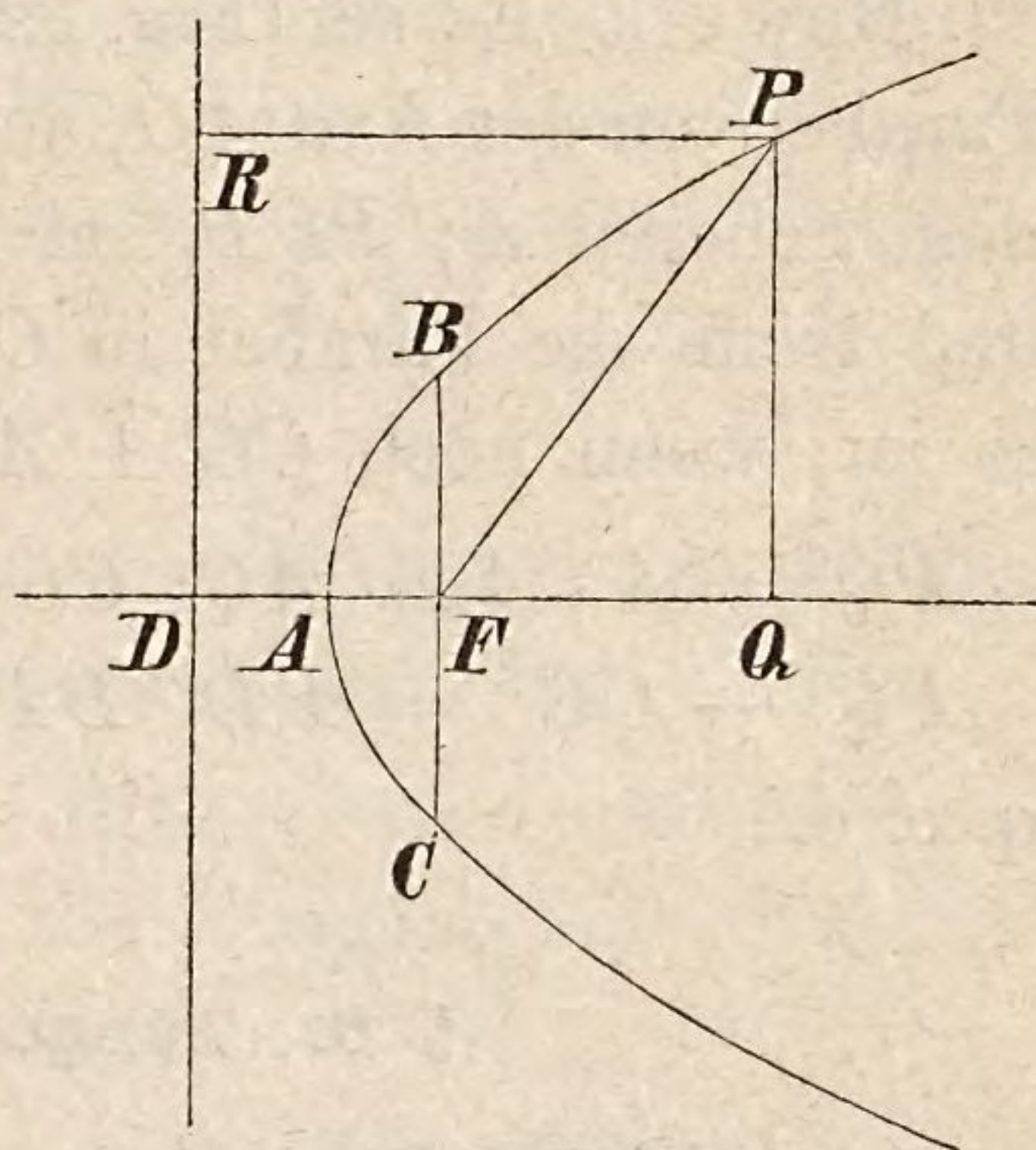


Fig. 21.

$$QF + 2AF = PF = \sqrt{PQ^2 + QF^2}$$

$$QF^2 + 4AF(QF + AF) = PQ^2 + QF^2$$

$$BC \cdot AQ = PQ^2, \text{ q. e. d.}$$

14. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einer Geraden, welche zu der Axe parallel ist.

Beweis. Betrachten wir die Parabel als eine Ellipse, deren Mittelpunkt ins Unendliche gerückt ist, so geht der über der großen Axe konstruierte Kreis in die Gerade über, welche im Scheitel auf der Axe senkrecht steht. Füllen wir von den Endpunkten zweier paralleler Sehnen der Parabel Perpendikel auf die Axe, so schneiden diese die Gerade, in welche der Kreis übergegangen, im Unendlichen, d. h. die Kreissehnen, welche mit den entsprechenden Parabelsehnen sich in Punkten der Axe schneiden, sind parallel der obigen Geraden, oder senkrecht zur Axe. Daher ist der Kreisdurchmesser und die ihm entsprechende Gerade, welche die parallelen Sehnen in der Parabel halbiert, parallel zur Axe.

15. *Erklärung.* Die Linie, welche alle parallelen Sehnen halbiert, wird (konjugierter) Durchmesser genannt.

16. *Lehrsatz.* Alle Durchmesser der Parabel sind parallel.

17. Die Axe der Parabel ist konjugierter Durchmesser zu den auf ihr senkrecht stehenden Sehnen.

18. Der Durchmesser teilt die zur Axe senkrechte Sehne so, daß das Rechteck aus den Abschnitten der letztern gleich ist dem Rechtecke aus dem Parameter und dem zwischen Sehne und Parabel gelegenen Abschnitte des Durchmessers.

Beweis. Es sei (Fig. 22) P ein Punkt der Parabel von der Axe AO , dem Brennpunkte F , dem Scheitel A ; PQP_1 sei $\perp AO$, $CD \parallel AO$ und treffe die Parabel in C , die Sehne in D , so ist, wenn noch $CG \perp AO$:

$$PQ^2 = 4 \cdot AF \cdot AQ; \quad CG^2 = 4AF \cdot AG$$

$$PQ^2 - CG^2 = PD \cdot DP_1 = 4AF \cdot CD,$$

q. e. d.

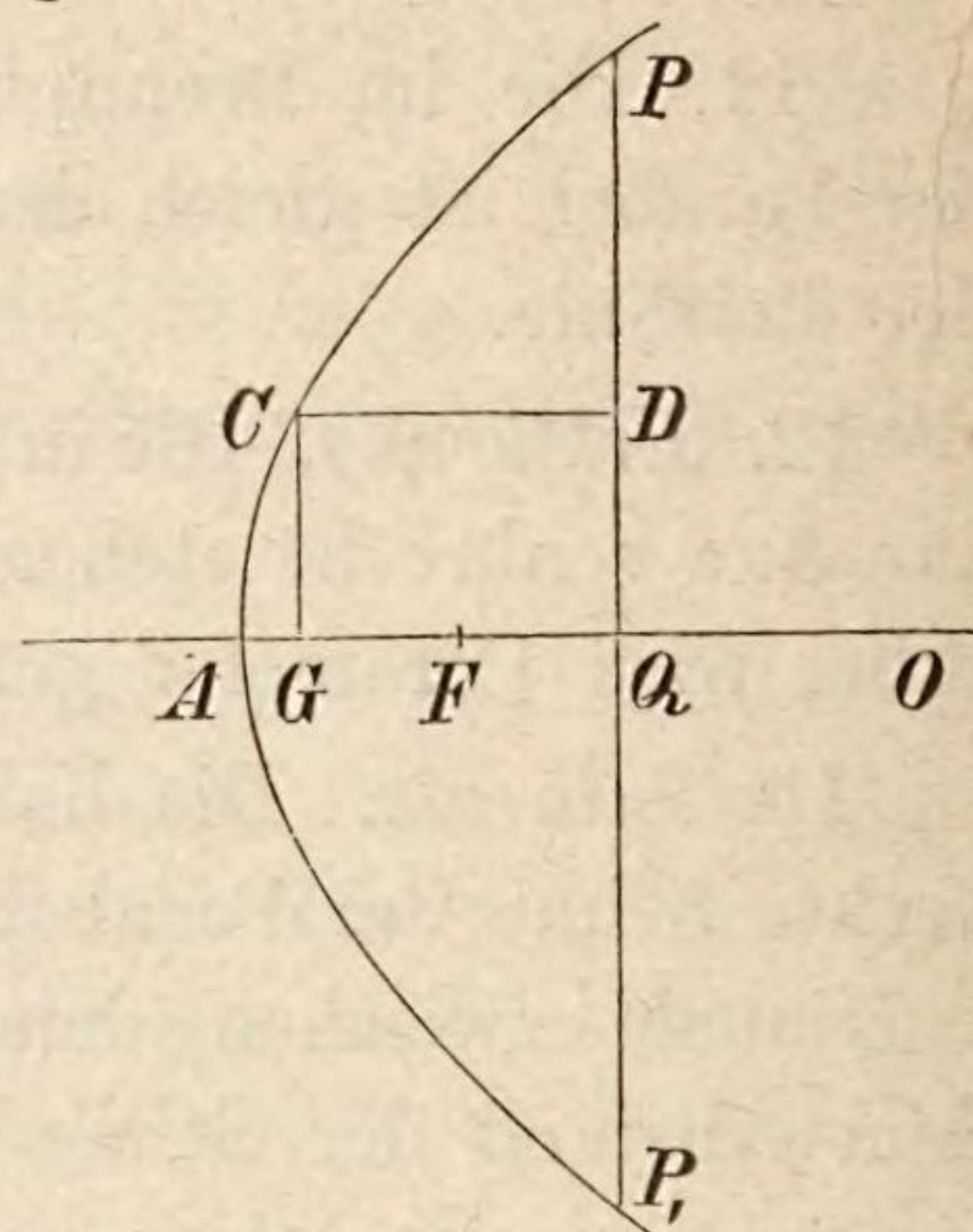


Fig. 22.

§ 8. Tangente, Normale, Pol, Polare.

1. *Erklärungen.* Fallen die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel in einem Punkte zusammen, so wird die Gerade Tangente genannt, der Doppelpunkt heisst Taktionspunkt, das Perpendikel in dem letzteren auf der Tangente ist die Normale. Die Länge einer $\left\{ \begin{matrix} \text{Tangente} \\ \text{Normale} \end{matrix} \right\}$ wird vom Taktionspunkte bis zum Schnittpunkte mit der Axe gerechnet. $\left\{ \begin{matrix} \text{Subtangente} \\ \text{Subnormale} \end{matrix} \right\}$ ist die Projektion der $\left\{ \begin{matrix} \text{Tangente} \\ \text{Normale} \end{matrix} \right\}$ auf die grofse Axe.

2. *Lehrsatz.* Die Tangente an die Parabel halbiert den Winkel, welchen der Brennstrahl des Taktionspunktes mit dem Perpendikel bildet, welches man vom Berührungspunkte auf die Direktrix fällen kann.

Beweis 1. Die Kreise (Fig. 23) um X und Y mögen den Kreis um F (in A und B) und die Gerade MN (in A_1 und B_1) berühren und mögen sich gegenseitig in C und C_1 schneiden; alsdann sind X und Y Punkte einer Parabel, deren Brennpunkt F und deren Direktrix MN parallel MN ist; XY ist daher Sekante und $\perp CC_1$. Nähert man nun Y dem Punkte X , so nähert sich B und

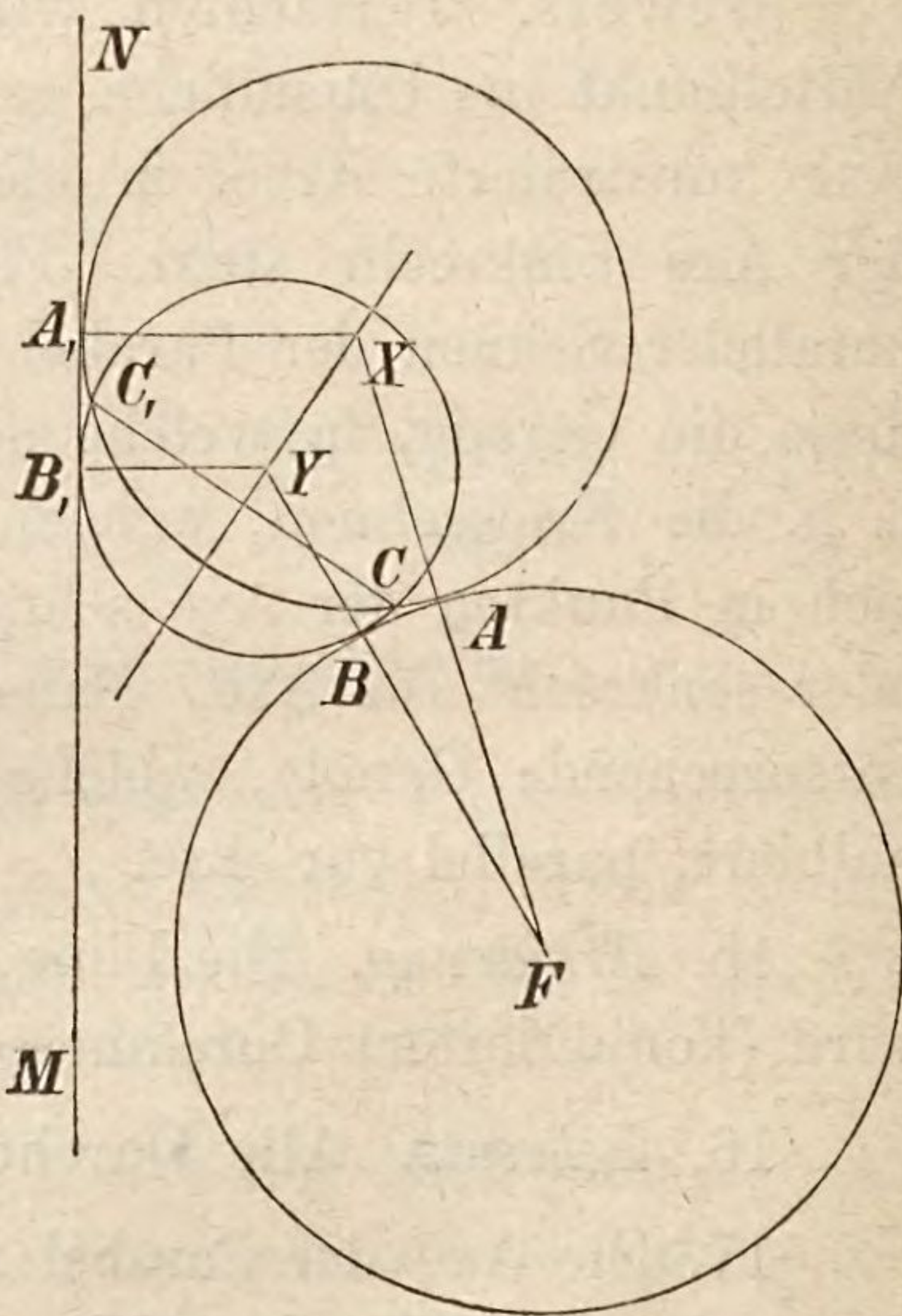


Fig. 23.

damit auch C dem Punkte A , ebenso B_1 und damit auch C_1 dem Punkte A_1 . Fällt nun Y auf X , so geht YX in die Tangente und CC_1 in AA_1 über und daher ist alsdann $\sphericalangle AXY = \sphericalangle A_1XY$, q. e. d.

Beweis 2. Die Parabel ist eine Ellipse, deren zweiter Brennpunkt im Unendlichen liegt, deren zweiter Brennstrahl eines jeden Punktes also parallel der Axe ist; daher halbiert die Tangente den Winkel, den im Taktionspunkte der Brennstrahl mit dem Perpendikel auf die Direktrix bildet.

Beweis 3 s. § 7, No. 8.

Zusatz. Die Normale in einem Punkte der Parabel halbiert den Winkel, welchen Brennstrahl und Durchmesser bilden.

3. Die Fußpunkte der Perpendikel vom Brennpunkte auf die Tangenten einer Parabel bilden eine Gerade, die Tangente im Scheitelpunkte der Parabel.

4. Die Subtangente der Parabel wird von dem Scheitelpunkte halbiert.

Beweis. Es sei (Fig. 24) F Brennpunkt, A Scheitel, DD_1 Leitlinie einer Parabel, die von der Geraden BC in X berührt werde. Die Tangente schneide die Axe in B , während letztere die Direktrix in P treffe. Fällt man $XQ \perp AF$ und $XR \perp DD_1$ und verbindet noch R mit B , X mit F , so ist $BRXF$ ein Rhombus, daher $BF = RX = PQ$, somit $BP = FQ$ oder $BA = AQ$.

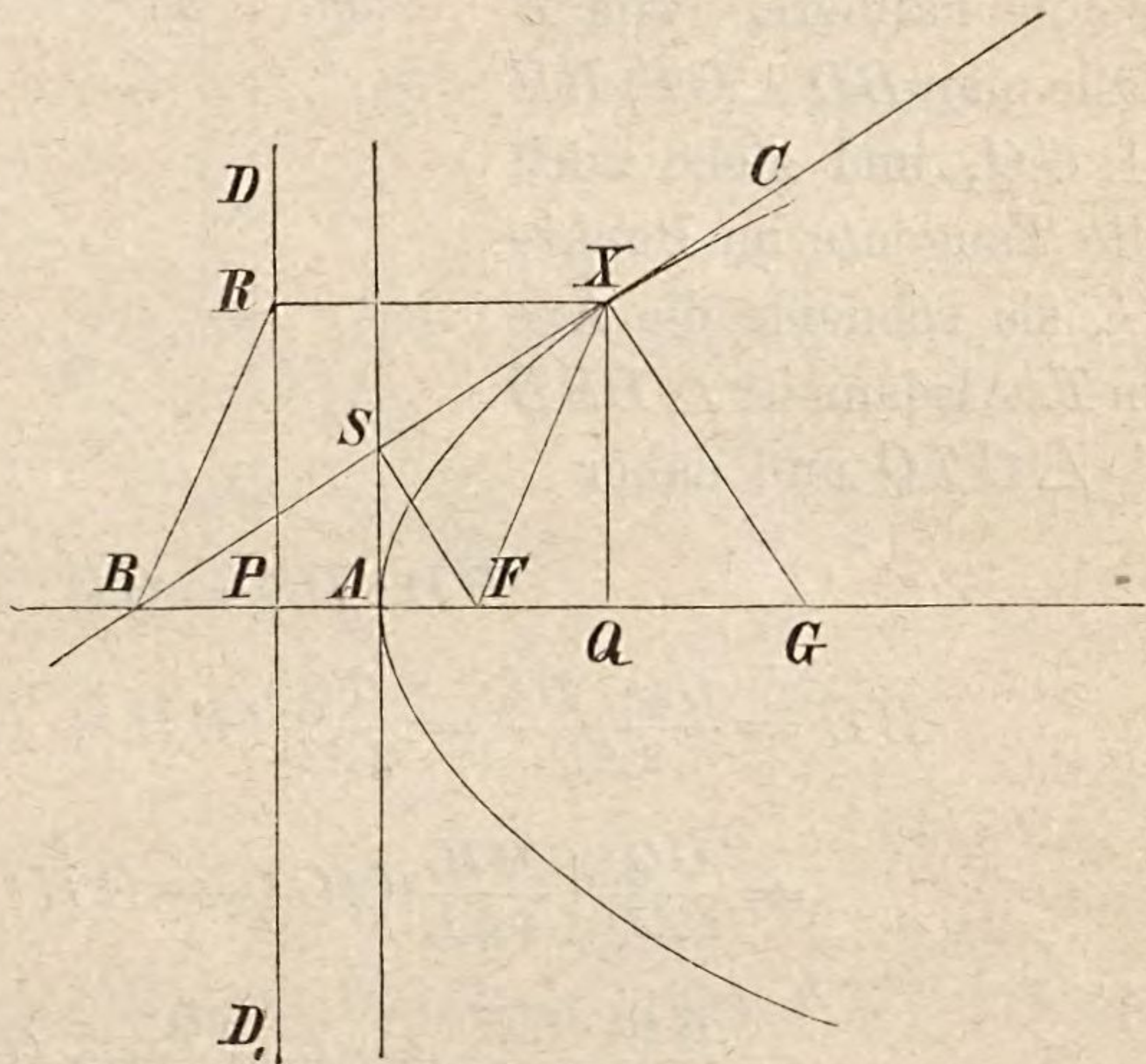


Fig. 24.

5. Die Subnormale der Parabel ist gleich dem halben Parameter.

Beweis. Es sei (in der vorherg. Figur) XG die Normale, sie treffe die Axe in G , verbindet man dann noch den Schnittpunkt S , in welchem die Tangente BC die Tangente des Scheitelpunktes trifft, mit F , so ist $SF \perp BC$ und daher:

$$GB : QB = FB : AB; \quad QB = 2 \cdot AB,$$

daher

$$GQ = 2 \cdot AF = FP, \text{ q. e. d.}$$

6. Die Tangente im Schnittpunkte eines Durchmessers der Parabel ist parallel den dem Durchmesser konjugierten Sehnen und umgekehrt.

Zusatz. Das Perpendikel auf der Axe im Scheitelpunkte der Parabel ist Tangente in demselben.

7. Fällt man von einem Endpunkte einer Parabelsehne ein Perpendikel auf den konjugierten Durchmesser, so ist das Quadrat dieses Perpendikels gleich dem Rechtecke aus dem Parameter und dem von der Parabel und der Sehne abgeschnittenen Stücke des Durchmessers.

Beweis. Es sei (Fig. 25) BC eine Sehne der Parabel, deren Brennpunkt F und deren Scheitel A ist; GS sei der konjugierte Durchmesser, der in S die Sehne halbiere. Von B fälle man $BD \perp GS$, $BH \perp GQ$, und ziehe noch die Tangente im Punkte G , sie schneide die Axe in T . Alsdann ist $\triangle BSD \sim \triangle GTQ$ und daher

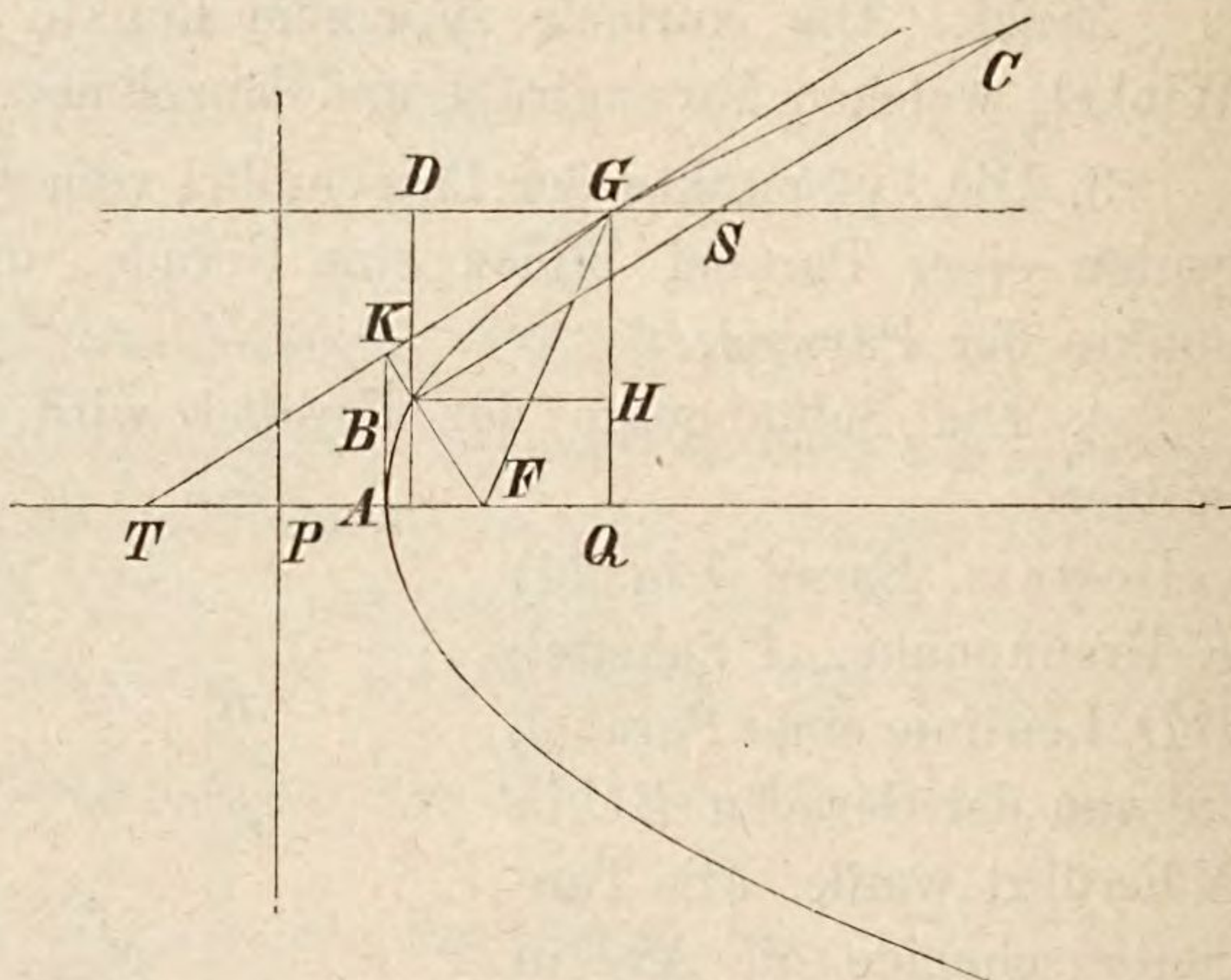


Fig. 25.

$$BD : DS = GQ : 2AQ$$

$$\begin{aligned} BD &= \frac{GQ \cdot DS}{2AQ} = \frac{GQ}{2AQ} (BH + GS) \\ &= \frac{GQ}{2AQ} \left\{ \frac{GH}{4AF} (2GQ - GH) + GS \right\} \\ &= \frac{GQ^2 \cdot GH}{AQ \cdot 4AF} + \frac{GQ}{2AQ \cdot 4AF} (GS \cdot 4AF - GH^2). \end{aligned}$$

Da nun $GH = BD$ und $GQ^2 = AQ \cdot 4AF$ ist, so muß auch $GS \cdot 4AF = GH^2 = BD^2$ sein.

8. Das Quadrat der halben Sehne in der Parabel ist gleich dem vierfachen Rechtecke aus dem Brennstrahle, der durch den Endpunkt des konjugierten Durchmessers geht, und dem Abschnitte, welcher auf diesem Durchmesser von der Sehne begrenzt wird.

Beweis. Man verbinde in der vorigen Figur F mit G , errichte in A ein Perpendikel (Tangente im Scheitel), K sei der Schnittpunkt

desselben mit der Tangente GT , verbinde K mit F , so ist $KF \perp TG$, $\triangle DSB \sim \triangle KGF$; daher

$$\begin{aligned} BS^2 &= \frac{GF^2}{FK^2} \cdot BD^2 = \frac{GF^2}{FG \cdot AF} \cdot 4AF \cdot GS \\ &= 4 \cdot GS \cdot GF, \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

9. *Erklärung.* Zwei Punkte, welche eine Sehne einer Parabel harmonisch teilen, sind zugeordnete Pole.

10. *Lehrsatz.* Brennpunkt und Schnittpunkt der Direktrix mit der Axe sind bei der Parabel zugeordnete Pole.

11. Die Tangenten an die Parabel in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne schneiden sich in einem Punkte der Direktrix und stehen senkrecht auf einander, und umgekehrt.

Beweis. Es sei F (Fig. 26) der Brennpunkt, A Scheitel, DC die Direktrix einer Parabel, PQ eine durch F gehende Sehne. Zieht man nun die Tangente AG im Scheitel, die Tangenten PT und QU in den Punkten P und Q , — T und U seien ihre Schnitte mit der Axe, G und H die mit der Geraden AG , — fällt die Perpendikel PC und QB auf die Direktrix, so muß $\sphericalangle CPF$

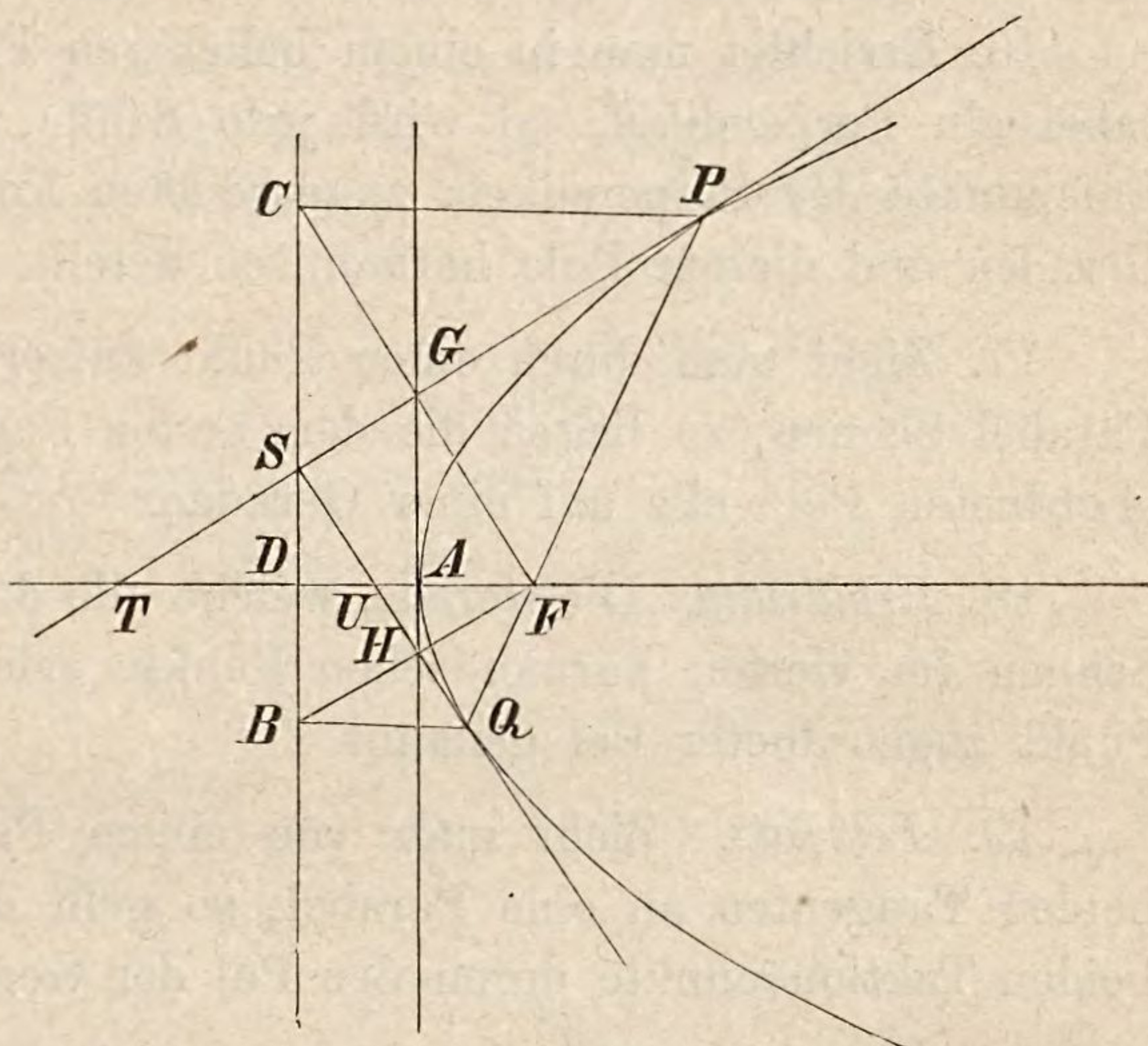


Fig. 26.

$+\sphericalangle FQB = \pi$, daher $\sphericalangle GPF + \sphericalangle FQH = \frac{\pi}{2}$ oder $PT \perp QU$ sein. Schneiden sich die beiden Tangenten PT und QU in S und verbindet man F mit H und mit G , so muß FH durch B und FG durch C gehen ($FPCT$ ist ein Rhombus), und es ist

$$SG = HF = BH;$$

daher liegt der Schnittpunkt S auf der Direktrix.

12. Die Katheten aller rechtwinkligen Dreiecke, deren Spitzen auf einer Geraden liegen, und deren Hypotenusen durch einen Punkt gehen, umhüllen als Tangenten eine Parabel; die Gerade ist Direktrix, der Punkt Brennpunkt derselben.

13. Die Tangenten in den Endpunkten einer Sehne einer Parabel schneiden sich in einem Punkte des zugeordneten Durchmessers.

14. Der Schnittpunkt zweier Tangenten und jeder Punkt der Sehne, welche die beiden Taktionspunkte verbindet, sind zugeordnete Pole und umgekehrt.

15. Von jedem Durchmesser der Parabel werden von einer konjugierten Sehne und von den Tangenten in den Endpunkten der letzteren gleiche Stücke abgeschnitten.

Beweis. Der Halbierungspunkt H einer Sehne s und der Schnittpunkt S der Tangenten in den Endpunkten der Sehne s liegen beide auf dem konjugierten Durchmesser d und sind konjugierte Pole, daher wird HS von dem Schnittpunkte der Parabel halbiert.

16. Errichtet man in einem beliebigen Punkte der Axe einer Parabel ein Perpendikel, so wird jede Sehne, welche durch den dem Fußpunkte des Perpendikels zugeordneten Pol geht, von der erstern Geraden und diesem Pole harmonisch geteilt.

17. Zieht man durch einen Punkt außerhalb oder innerhalb der Parabel Sehnen, so liegen die dem ersten Punkte auf den Geraden zugeordneten Pole alle auf einer Geraden.

18. *Erklärung.* Die Gerade, welche alle durch einen Punkt gehende Sehnen im vierten harmonischen Punkte schneidet, wird Polare, der Punkt zugeordneter Pol genannt.

19. *Lehrsatz.* Zieht man von einem Punkte einer Geraden die beiden Tangenten an eine Parabel, so geht die Verbindungssehne der beiden Taktionspunkte durch den Pol der Geraden und umgekehrt.

III. Abschnitt.

§ 9. Kegelschnitte.

1. *Lehrsatz.* Wird ein gerader Kreiskegel durch eine Ebene geschnitten, welche mit der Axe einen größeren Neigungswinkel als den halben Öffnungswinkel des Kegels bildet, so ist die erzeugte Schnittfigur eine Ellipse.

Beweis. Da der Neigungswinkel der Ebene gegen die Axe größer ist als der Winkel, den die letztere mit der Seite bildet, so muß die Ebene sämtliche Seiten des Kegels und zwar in der

einen Hälfte des Kegelmantels schneiden. Denken wir uns nun (Fig. 27) denjenigen Axenschnitt des Kegels, der auf der gegebenen Ebene senkrecht steht; S sei die Spitze, SM die Axe, SE und SE_1 die beiden Seiten des Axenschnittes des Kegels, GH die Schnittlinie der beiden Ebenen, so ist $\angle SIH$ der

Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Axe. Man konstruiere nun die beiden Kreise N und M , welche die

beiden Seiten des Kegels und GH berühren, die Taktionspunkte seien bezüglich D, D_1, E, E_1, F und F_1 . Denkt man sich nun im Kegel (Fig. 28) um die Punkte N und M der Axe Kugeln mit denselben Radien, wie die konstruierten Kreise, so werden diese Kugeln von dem

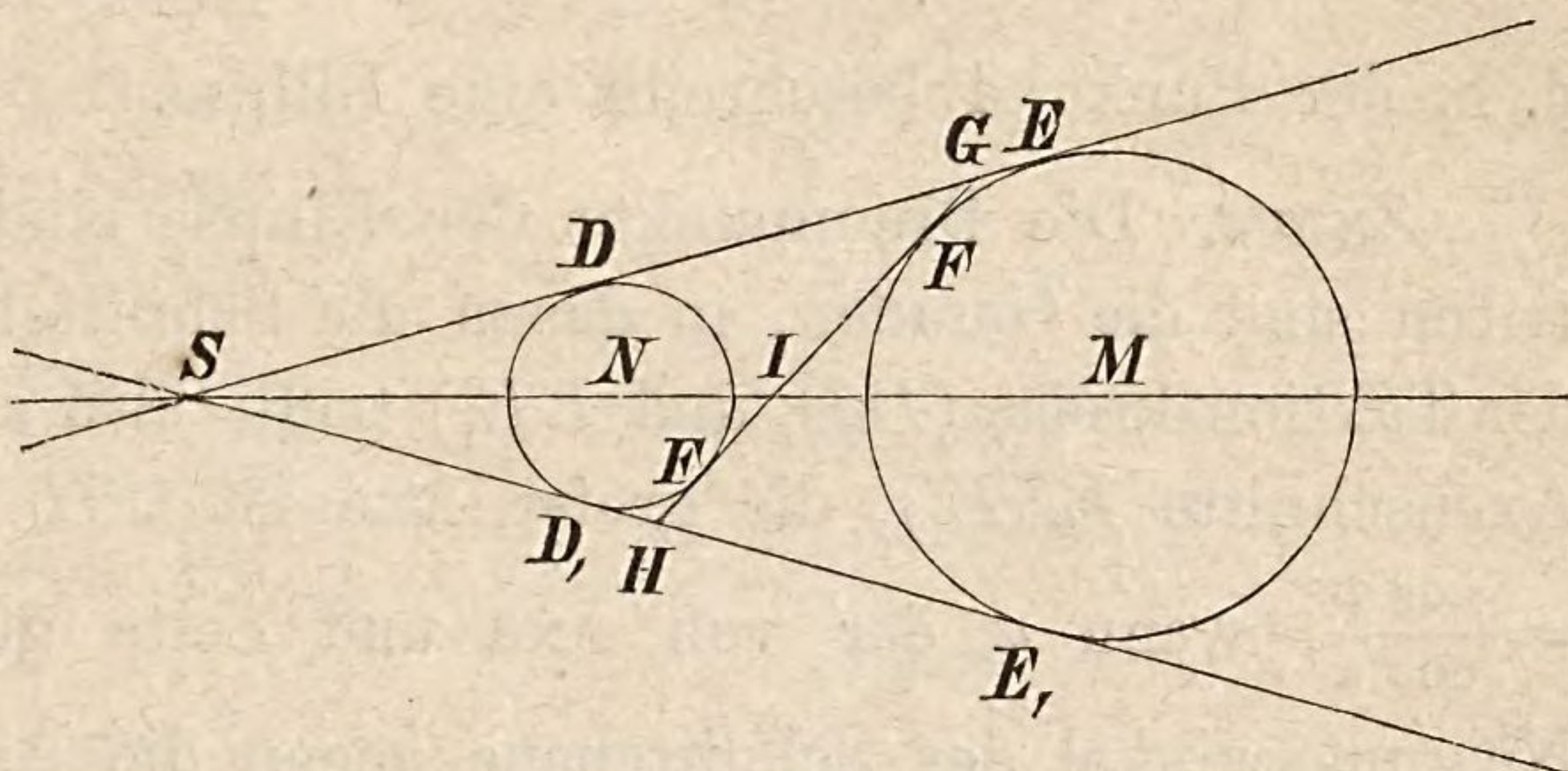


Fig. 27.

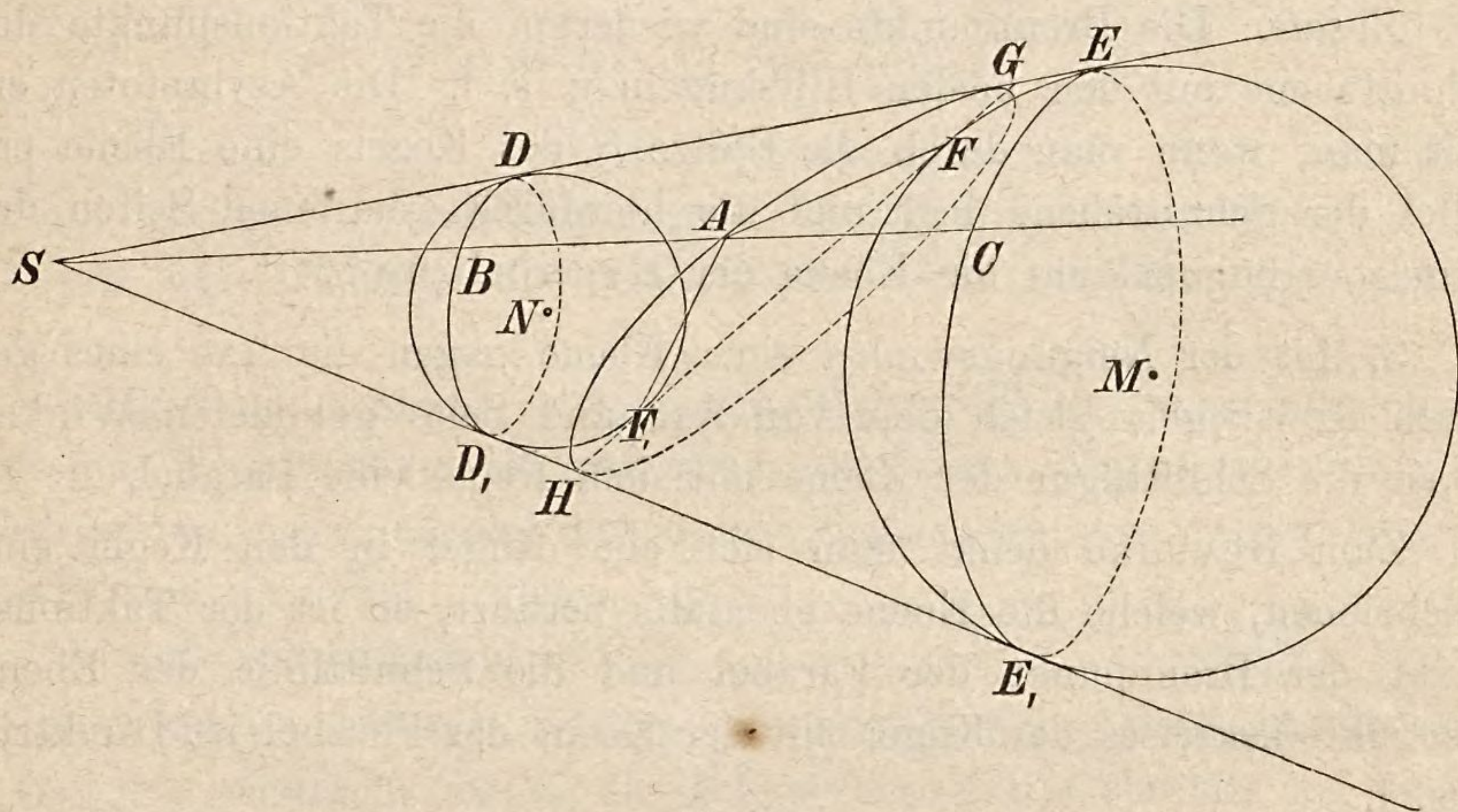


Fig. 28.

Kegel in zwei ähnlich gelegenen Kreisen (DD_1 und EE_1) berührt, und letztere bilden die Endflächen eines geraden abgestumpften Kegels. Die gegebene Schnittebene berührt ebenfalls die beiden Kugeln und zwar in den Punkten F und F_1 . Zieht man nun eine beliebige Seite des Kegels, so trifft diese die Schnittebene in einem Punkte — es sei in A — und ebenso die beiden Taktionskreise — es sei in B und C —; verbindet man nun A mit den Taktionspunkten F und F_1 , so ist:

$$AF_1 = AB$$

$$AF = AC$$

$$AF + AF_1 = AB + AC = BC = \text{konst.}$$

d. h. der Punkt A beschreibt eine Ellipse.

Zusatz. Die Brennpunkte der Ellipse sind F und F_1 , die Direktrixen sind die Geraden, in denen die Schnittebene die beiden Ebenen der Taktionskreise (DD_1 und EE_1) trifft (also senkrecht zu dem obigen Axenschnitte ESE_1), die groſe Axe ist GH und der Quotient μ ist $= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$, wenn α der von Axe und Seite gebildete Winkel, β der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Axe ist.

2. Jede Ebene, deren Neigungswinkel gegen die Axe eines geraden Kreiskegels kleiner ist als der von Axe und Seite gebildete Winkel, schneidet den Kegel in einer Hyperbel.

Der Beweis ist entsprechend dem vorigen, nur liegen die beiden umhüllten Kugeln in verschiedenen Teilen des Kegels.

Zusatz. Die Brennpunkte sind wiederum die Taktionspunkte der Schnittebene mit den beiden Hilfskugeln u. s. f. Die Asymptoten erhält man, wenn man durch die Spitze S des Kegels eine Ebene parallel der Schnittebene legt und die hierdurch erhaltenen Seiten des Kegels orthogonal auf die Ebene der Hyperbel projiziert.

3. Ist der Neigungswinkel einer Ebene gegen die Axe eines geraden Kreiskegels gleich dem von Axe und Seite gebildeten Winkel, so ist die Schnittfigur der Ebene mit dem Kegel eine Parabel.

Zum Beweise denkt man sich eine Kugel in den Kegel eingeschrieben, welche die Ebene ebenfalls berührt, so ist der Taktionspunkt der Brennpunkt der Parabel und die Schnittlinie der Ebene des Taktionskreises der Kugel mit der Ebene der Parabel ist Direktrix u. s. f.

4. Die Ellipse hat keinen, die Parabel hat einen, die Hyperbel hat zwei Punkte im Unendlichen.

5. Ellipse und Parabel haben keine Asymptoten.

6. Die Parabel kann als Übergang der Ellipse zur Hyperbel aufgefaßt werden.

7. Eine Ebene, welche auf dem Hauptschnitt eines beliebigen schiefen Kreiskegels steht und die beiden Geraden des Schnittes auf derselben Seite der Kegelspitze trifft, erzeugt als Schnittfigur eine Ellipse.

Beweis. Es sei (Fig. 29) ASC der Hauptschnitt eines Kegels, BB_1 sei ein Kreis und AA_1 sei der Schnitt einer zu ASC senkrechten Ebene; die Gerade AA_1 ist alsdann die Axe dieser Ebene und des Hauptschnittes; die Ebene des Kreises BB_1 möge die Schnittebene in PQ treffen, so ist $PQ \perp BB_1$ und $\perp AA_1$, also PQ halbe Kreissehne, somit

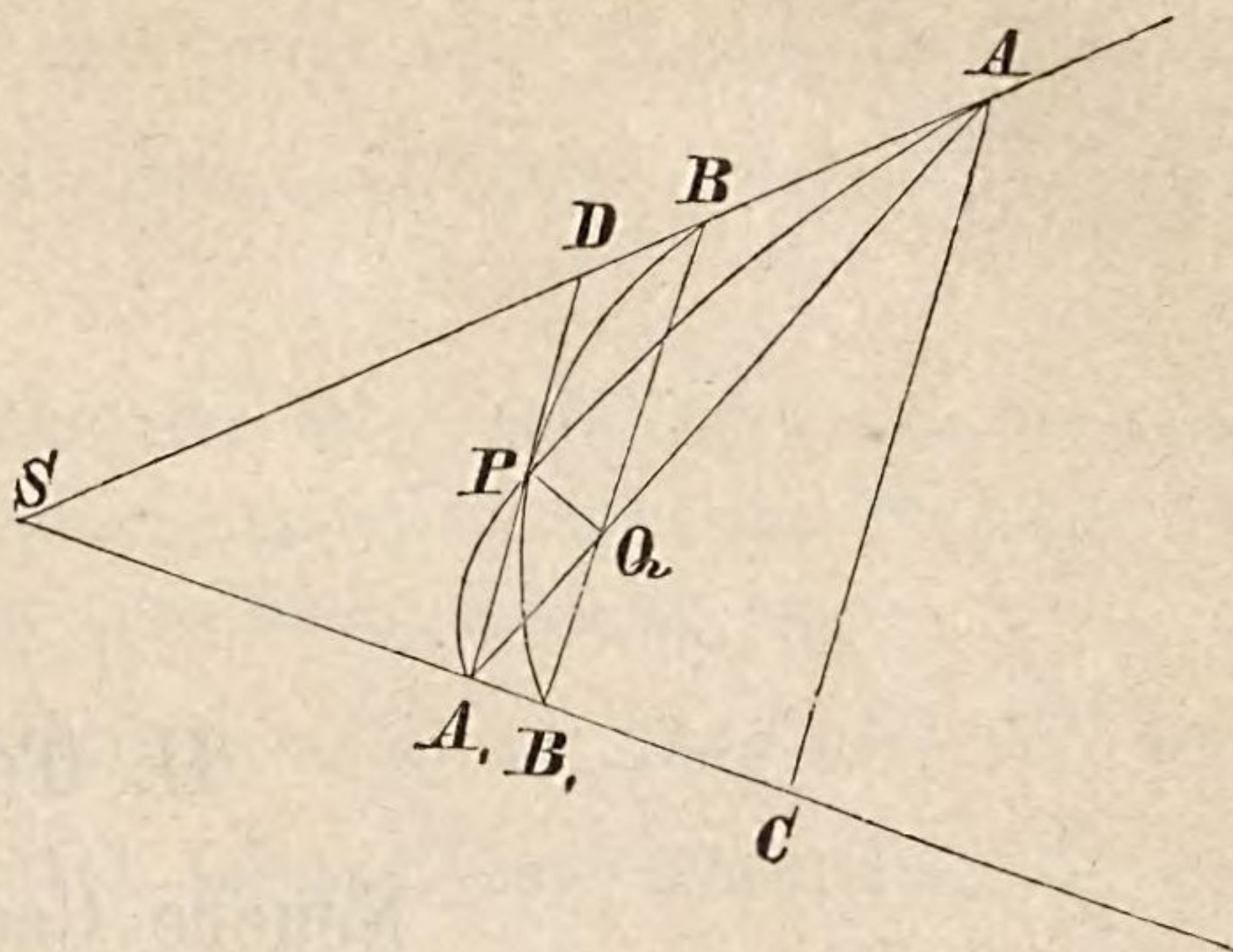


Fig. 29.

$$PQ^2 = BQ \cdot B_1Q.$$

Es ist nun ferner, wenn man durch A und A_1 die Geraden AC und $A_1D \parallel BB_1$ zieht:

$$BQ : DA_1 = AQ : AA_1$$

$$B_1Q : AC = A_1Q : A_1A$$

$$BQ \cdot B_1Q : AC \cdot A_1D = AQ \cdot A_1Q : AA_1^2$$

$$PQ^2 = AQ \cdot A_1Q \cdot \frac{AC \cdot A_1D}{AA_1^2}.$$

Da nun AC , A_1D und AA_1 konstante Größen sind, so steht PQ zur mittleren Proportionale von AQ und A_1Q in konstantem Verhältnisse oder P beschreibt eine Ellipse, deren eine Axe die Gerade AA_1 ist.

8. Trifft eine Ebene, welche zum Hauptschnitte eines beliebigen (schiefen) Kreiskegels senkrecht steht, die beiden Geraden des Hauptschnittes auf verschiedenen Seiten der Kegelspitze, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

Beweis entsprechend No. 7.

9. Trifft eine Ebene, welche zum Hauptschnitte eines beliebigen Kreiskegels senkrecht steht, die Ebene des Hauptschnittes in einer Geraden, die einer Seite parallel ist, so ist der Kegelschnitt eine Parabel.

II. Teil.

Neuere Geometrie.

§ 1. Drei- und Vierpunktreihe; Drei- und Vierstrahlenbüschel.

1. *Erklärungen.* Jede Gerade wird als Strahl d. h. als durch die Bewegung eines Punktes erzeugt gedacht. Je nachdem die Bewegung des erzeugenden Punktes in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne erfolgt, wird die erzeugte Gerade (bez. Strecke) positiv oder negativ gerechnet ($AB = -BA$ oder $AB + BA = 0$).

2. Jeder ebene Winkel wird durch die Drehung eines Schenkels erzeugt gedacht; der Sinn der Drehung wird durch das Vorzeichen bestimmt ($\sphericalangle BAC + \sphericalangle CAB = 0$).

3. *Lehrsatz.* Wird eine Strecke innerlich oder äußerlich geteilt, so ist stets die Strecke gleich der Summe der Teilstrecken.

Beweis. Wird AB durch C innerlich oder äußerlich geteilt, so ist nach 1 stets $AC + CB = AB$; sind C, D, E u. s. f. beliebig gelegene Teilpunkte, so ist $AB = AC + CD + DE + EB$.

4. Wird ein Winkel innerlich oder äußerlich durch einen Strahl, der durch den Scheitel geht, geteilt, so ist die Summe der Teilwinkel stets gleich dem geteilten Winkel.

Beweis. Wird $\sphericalangle BAC$ durch AD, AE, AF geteilt, so ist (nach 2) stets $\sphericalangle BAD + \sphericalangle DAE + \sphericalangle EAF + \sphericalangle FAC = \sphericalangle BAC$.

5. *Erklärungen.* Mehrere Punkte auf einer Geraden bilden eine Punktreihe, mehrere Gerade, die durch einen Punkt gehen, ein Strahlenbüschel; bei ersterer wird die Gerade, bei letzterem der Schnittpunkt Träger des Systems genannt.

6. Wird eine Strecke durch einen Punkt geteilt, so wird der Quotient aus den beiden Abschnitten das Schnittverhältnis genannt. (Ist AB durch C geteilt, so ist $\frac{AC}{CB}$ das Schnittverhältnis. Liegt C zwischen A und B , so ist das Verhältnis positiv, und umgekehrt.) Wird ein ebener Winkel durch einen Strahl, der durch den Scheitel geht, ge-

teilt, so wird der Quotient aus den Sinus der Winkel das Schnittverhältnis genannt. (Wird $\sphericalangle BAC$ durch AD geteilt, so ist $\frac{\sin \cdot BAD}{\sin \cdot DAC}$ das Schnittverhältnis).

7. *Lehrsätze.* In der Dreipunktreihe wird jede von zwei Punkten begrenzte Strecke durch den dritten so geteilt, daß das Produkt der drei Schnittverhältnisse gleich der (positiven) Einheit ist.

Beweis. ABC sei eine Dreipunktreihe, so sind AB , BC und CA die drei Strecken, und AB wird durch C im Verhältnisse $\frac{AC}{CB}$ geteilt u. s. f., daher ist

$$\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} = + 1.$$

8. In dem Dreistraahlenbüschel wird jeder von zwei Strahlen gebildete Winkel durch den dritten so geteilt, daß das Produkt der drei Schnittverhältnisse gleich der positiven Einheit ist.

Beweis. Sind a, b, c drei Strahlen, die durch einen Punkt gehen, so sind die drei Winkel (ab) , (bc) und (ca) , die drei Schnittverhältnisse sind $\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$, $\frac{\sin(ba)}{\sin(ac)}$ und $\frac{\sin(cb)}{\sin(ba)}$ und somit deren Produkt gleich der positiven Einheit.

9. *Erklärungen.* Bei $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Vierpunktreihe} \\ \text{dem Vierstrahlenbüschel} \end{array} \right\}$ wird der Quotient aus den beiden Schnittverhältnissen $\left\{ \begin{array}{l} \text{einer Strecke} \\ \text{eines Winkels} \end{array} \right\}$ durch die beiden andern $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte} \\ \text{Strahlen} \end{array} \right\}$ das Doppelverhältnis genannt. Sind $\left\{ \begin{array}{l} A, B, C, D \\ a, b, c, d \end{array} \right\}$ vier Elemente, so sind $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ und $\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}$ die Doppelverhältnisse der beiden Gebilde; man bezeichnet dieselben kurz mit $(ABCD)$ bez. $(abcd)$. Je zwei $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte} \\ \text{Strahlen} \end{array} \right\}$ werden zugeordnete genannt, wenn das von ihnen begrenzte Gebilde (Strecke oder Winkel) von den beiden anderen Elementen geteilt wird. Bei der Schreibweise sind die zugeordneten Elemente die beiden ersten und die beiden letzten.

10. *Lehrsatz.* Schneidet eine Transversale die vier Strahlen eines Büschels, so ist das Doppelverhältnis der erzeugten Vierpunktreihe gleich dem des Vierstrahlenbüschels.

Beweis. Der Träger (Fig. 1) des Büschels sei S , die Strahlen seien a, b, c und d und mögen die Transversale t in den Punkten

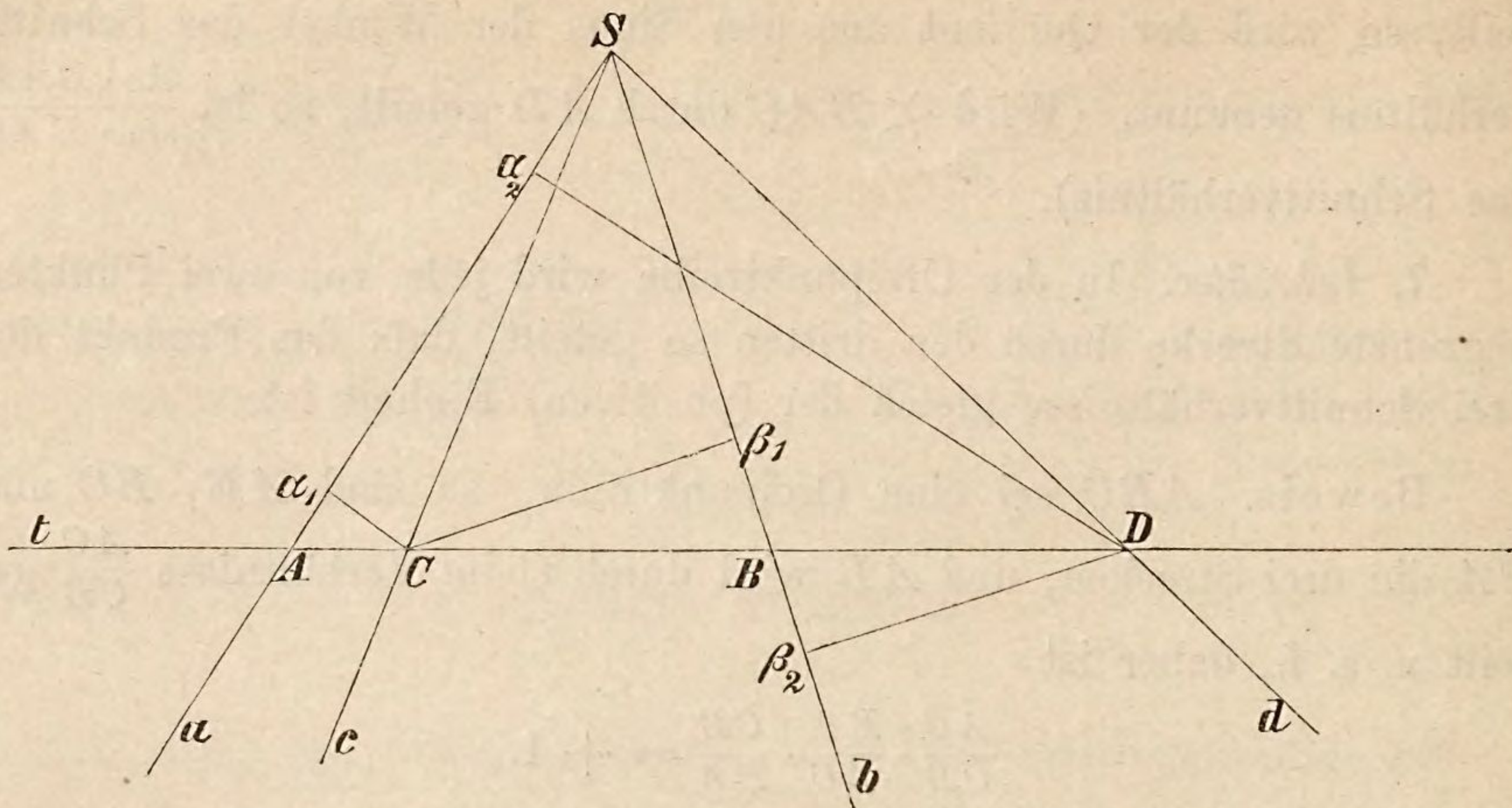


Fig. 1.

A, B, C, D schneiden; fällt man alsdann von C und D die Perpendikel $C\alpha_1$ und $D\alpha_2 \perp a$, $C\beta_1$ und $D\beta_2 \perp b$, so ist

$$\begin{aligned} (abcd) &= \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)} = \frac{C\alpha_1}{C\beta_1} : \frac{D\alpha_2}{D\beta_2} \\ &= \frac{C\alpha_1}{D\alpha_2} : \frac{C\beta_1}{D\beta_2} = \frac{AC}{AD} : \frac{CB}{DB} \\ &= \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD). \end{aligned}$$

10^a. Zieht man durch einen Punkt als Träger ein Vierstrahlenbüschel, dessen Strahlen durch die Punkte einer Vierpunktreihe gehen, so ist das Doppelverhältnis des Büschels gleich dem der Reihe.

Beweis folgt aus 10.

11. Das Doppelverhältnis eines Systems von 4 Elementen bleibt ungeändert, wenn man gleichzeitig je zwei Elemente mit ihren zugeordneten oder das eine zugeordnete Paar mit dem andern vertauscht.

Beweis. Aus der Definition des Doppelverhältnisses folgt für die Vierpunktreihe $ABCD$:

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \\ &= \frac{BD}{DA} : \frac{BC}{CA} = (BADC) \\ &= \frac{CA}{AD} : \frac{CB}{BD} = (CDAB) \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Da dieser Satz für die Reihe gilt, so ist er auch nach 10 für das Büschel gültig.

12. Vertauscht man ein Paar zugeordneter Glieder eines Doppelverhältnisses, so erhält man den reciproken Wert desselben.

Beweis. Die vier Punkte einer Reihe seien A, B, C und D , so ist

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} \\ &= \frac{1}{\frac{AD}{DB} : \frac{AC}{CB}} = \frac{1}{(ABDC)} \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

13. Vertauscht man die beiden mittleren oder die beiden äußeren Elemente in einem Doppelverhältnisse, so ergänzen sich die beiden Verhältnisse zur positiven Einheit.

Beweis. Es ist nach 3:

$$AB = AD + DB$$

$$BC = BD + DC$$

$$CA = CD + DA$$

und daher:

$$AB \cdot CD = AD \cdot CD + DB \cdot CD$$

$$BC \cdot AD = BD \cdot AD + DC \cdot AD$$

$$CA \cdot BD = CD \cdot BD + DA \cdot BD.$$

Durch Addition erhält man leicht:

$$\begin{aligned}AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD &= AB \cdot DC \\ &+ BC \cdot DA + CA \cdot DB = 0.\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich dann weiter:

$$\begin{aligned}\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} + \frac{CA \cdot BD}{BC \cdot AD} + 1 &= 0 \\ \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} + \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} &= 1 \\ (ACBD) + (ABCD) &= 1, \text{ q. e. d.}\end{aligned}$$

§ 2. Projektion und Perspektive.

1. *Erklärung.* Sind in einer Ebene Punkte gegeben und zieht man durch dieselben Strahlen eines Büschels, so erzeugen die letzteren auf einer Transversale eine Punktreihe, welche die Projektionen der gegebenen Punkte auf die Transversale sind; die Strahlen sind Projektionsstrahlen, der Träger des Büschels Projektionscentrum. In entsprechender Weise werden durch ein räumliches Büschel die Projektionen von Punkten auf eine Ebene erzeugt.

2. *Lehrsätze.* Projiziert man einen Punkt einer von zwei sich schneidenden Ebenen von einem beliebigen Centrum aus auf die zweite Ebene, so liegt seine Projektion in einer Geraden mit demjenigen Punkte, auf den beim Zusammenschlagen der beiden Ebenen der pro-

jizierte Punkt fällt, und mit demjenigen, den ein auf der Symmetrieebene der beiden Ebenen senkrecht vom Centrum aus gezogener Strahl auf der Projektionsebene erzeugt.

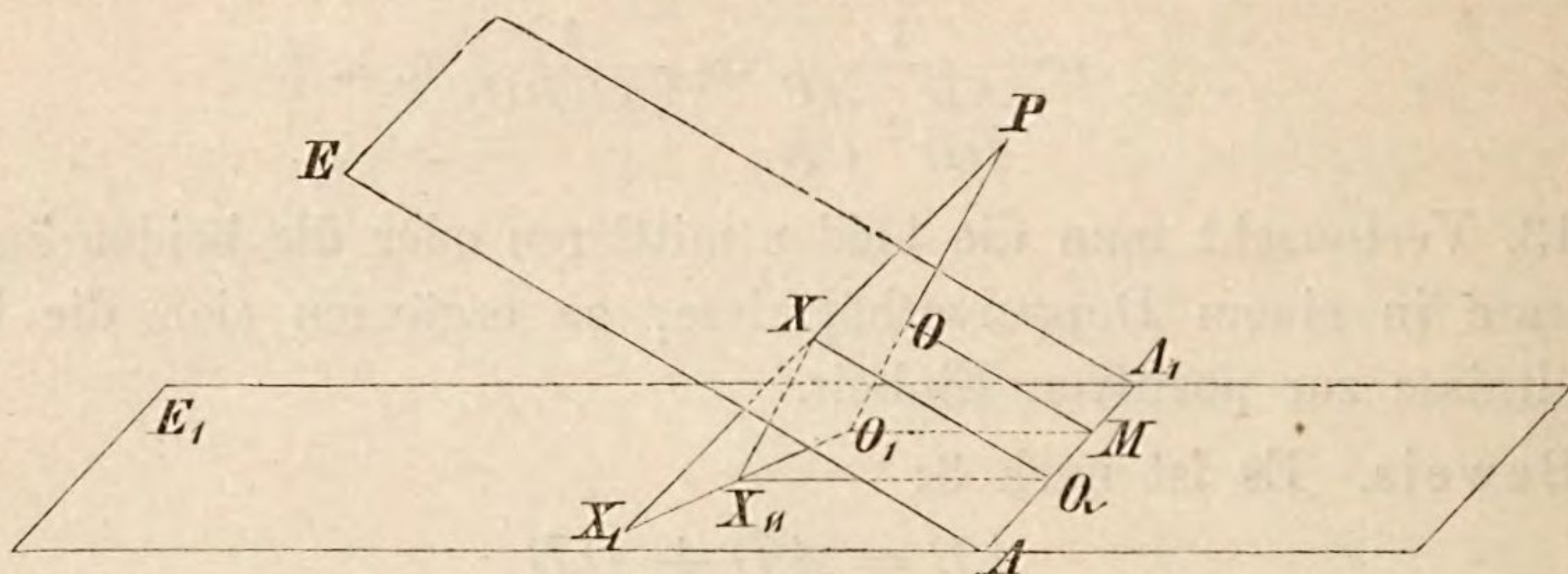


Fig. 2.

Beweis (Fig. 2). Die beiden Ebenen E und E_1 mögen sich in der Axe AA_1 schneiden, X sei ein Punkt der Ebene E und werde von einem Punkte P (außerhalb beider Ebenen) auf E_1 projiziert; die Projektion sei X_1 . Der durch P gehende Strahl, welcher zur Symmetrieebene von E und E_1 senkrecht steht, also mit E und E_1 gleiche Winkel bildet, schneide E in O und E_1 in O_1 ; fällt man dann in E $OM \perp AA_1$, verbindet M mit O_1 , so ist O_1M ebenfalls $\perp AA_1$ und $O_1M = OM$, d. h. beim Zusammenschlagen fällt O auf O_1 . Zieht man nun $XQ \perp AA_1$, errichtet in E_1 $QX_{11} \perp AA_1$ — X_{11} sei der Schnittpunkt von QX_{11} mit der Verbindungslinie O_1X_1 — verbindet ferner noch X mit X_{11} , so liegen die Punkte P , O , O_1 , X , X_1 und X_{11} in einer Ebene, und XX_{11} ist $\parallel OO_1$ als Schnittlinien der parallelen Ebenen OMO_1 und XQX_{11} mit OPX ; daher ist $\triangle XQX_{11} \sim \triangle OMO_1$, somit $X_{11}Q = XQ$ oder X_{11} ist der umgeschlagene Punkt X , und somit liegen O_1 , der umgeschlagene Punkt O , X_{11} und X_1 in einer Geraden.

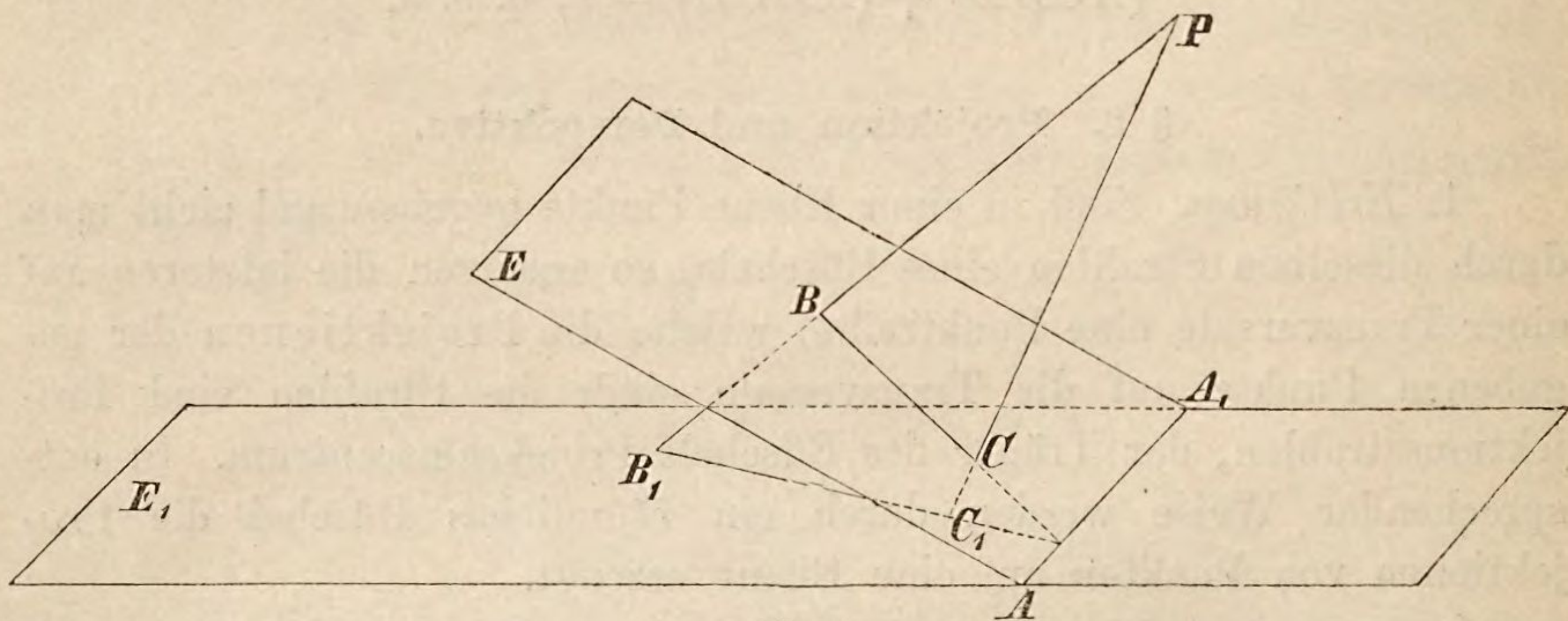


Fig. 3.

3. Projiziert man eine Strecke einer Ebene auf eine zweite Ebene, so schneiden sich die gegebene Strecke und ihre Projektion (bez. ihre Verlängerungen) in einem Punkte der Axe der beiden Ebenen.

Beweis. Projiziert man (Fig. 3) die Strecke BC der Ebene E von P aus auf die Ebene E_1 , die Projektion sei B_1C_1 , so bilden die Strahlen PBB_1 und PCC_1 eine Ebene, als deren Schnitte mit E und E_1 die Geraden BC und B_1C_1 erscheinen; somit haben wir drei Ebenen, deren drei Axen durch einen Punkt gehen müssen.

4. Projiziert man eine Strecke einer Ebene von einem Punkte aus auf eine zweite und schlägt dann die beiden Ebenen zusammen, so schneiden sich die umgeschlagene Strecke und ihre Projektion in einem Punkte der Axe.

Beweis. Der Schnittpunkt der Strecke und ihrer Projektion erleidet beim Drehen der Ebenen, als in der Axe liegend, keine Änderung der Lage.

5. Projiziert man ein in einer Ebene gelegenes Polygon auf eine zweite Ebene und dreht die Ebenen um die Axe bis zum Zusammenfallen, so liegen das umgeschlagene Polygon und seine Projektion so, daß die Verlängerungen homologer Seiten sich in Punkten einer Geraden (der Axe) und die Verbindungslinien homologer Punkte in einem Punkte schneiden.

Beweis. Folgt aus den vorhergehenden Sätzen.

5. *Erklärung.* Zwei Figuren, welche man durch ein- oder mehrmalige Projektion aus einander oder aus derselben dritten Figur sich entstanden denken kann, werden projektivisch genannt. Ebene Figuren, welche in einer Ebene so liegen, daß die Verbindungslinien homologer Ecken sich gleichartig in einem Punkte (Augpunkt), die homologen Seiten in Punkten einer Geraden (Axe) schneiden, werden perspektivisch gelegen oder kurz perspektivisch genannt.

6. *Lehrsatz.* Projiziert man von zwei Centren aus einen Punkt auf eine Ebene, so geht die Verbindungslinie der beiden Projektionen durch den Schnittpunkt der Verbindungslinie der beiden Centren mit der Ebene.

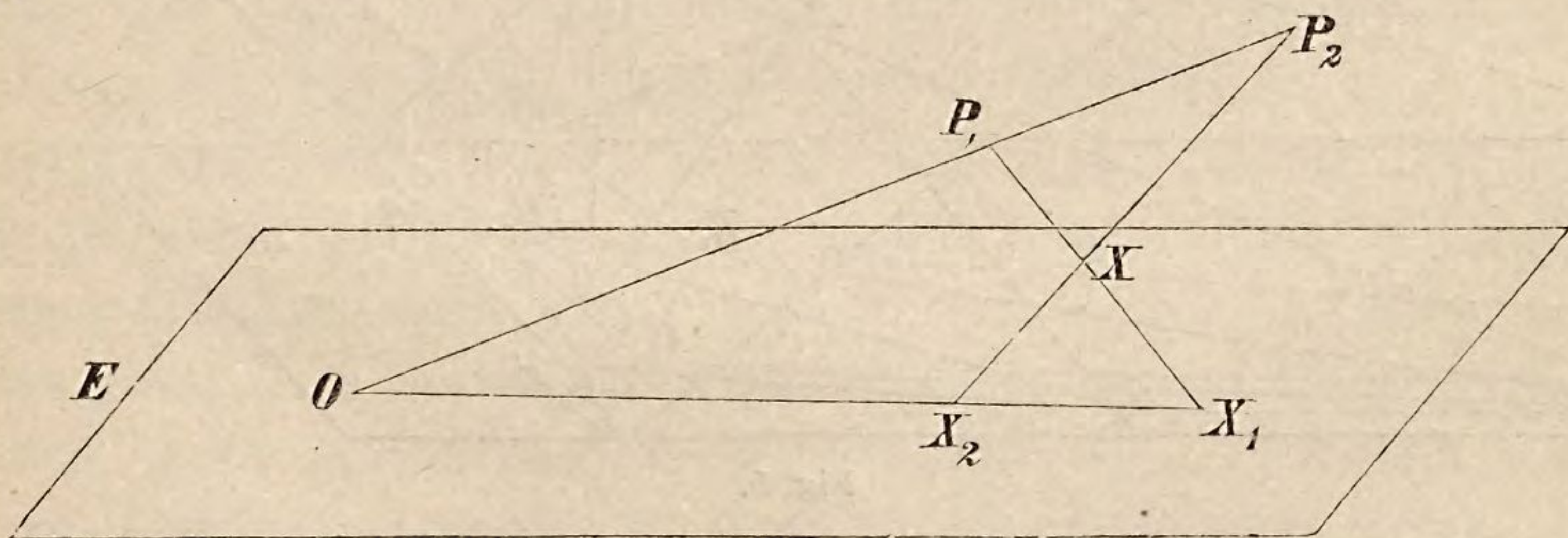


Fig. 4.

Beweis. P_1 und P_2 (Fig. 4) seien die beiden Projektionscentren, X der projizierte Punkt, X_1 und X_2 seine beiden Projektionen in der

Ebene E , so bestimmen die fünf Punkte P_1, P_2, X, X_1, X_2 eine Ebene, welche die Projektionsebene in $X_1 X_2$ schneidet, daher müssen $X_1 X_2$ und $P_1 P_2$ sich (und zwar in einem Punkte der Ebene E) schneiden.

7. Die beiden Projektionen einer Strecke von zwei Centren aus schneiden sich gegenseitig in demjenigen Punkte, in welchem die projizierte Strecke die Projektionsebene trifft.

Beweis. Je ein Centrum, die gegebene Strecke und die entsprechende Projektion derselben bestimmen eine Ebene; daher haben wir (mit der Ebene, auf welche projiziert wird) drei Ebenen, deren Schnittlinien bezüglich die gegebene Strecke und deren beide Projektionen aufnehmen und sich in einem Punkte treffen.

8. Wird ein Dreieck von zwei Punkten aus auf eine Ebene projiziert, so liegen die beiden Projektionen perspektivisch.

Beweis. Das Dreieck ABC (Fig. 5) liege in der Ebene E , welche E_1 in der Axe a schneide; von P_1 aus projiziert erhält man in E_1 das $\triangle A_1 B_1 C_1$ und es schneiden sich die drei Seiten desselben mit den homologen von $\triangle ABC$ in Punkten der Axe a . Von P_2 aus erhält man in E_1 die Projektion $\triangle A_2 B_2 C_2$, dessen Seiten sich mit den homologen des $\triangle ABC$ in denselben Punkten der Axe, wie die des $\triangle A_1 B_1 C_1$, schneiden müssen; da nun noch $A_1 A_2$ durch O , den Schnittpunkt von $P_1 P_2$ mit E_1 , geht, ebenso $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$, so liegen $\triangle A_1 B_1 C_1$ und $\triangle A_2 B_2 C_2$ perspektivisch.

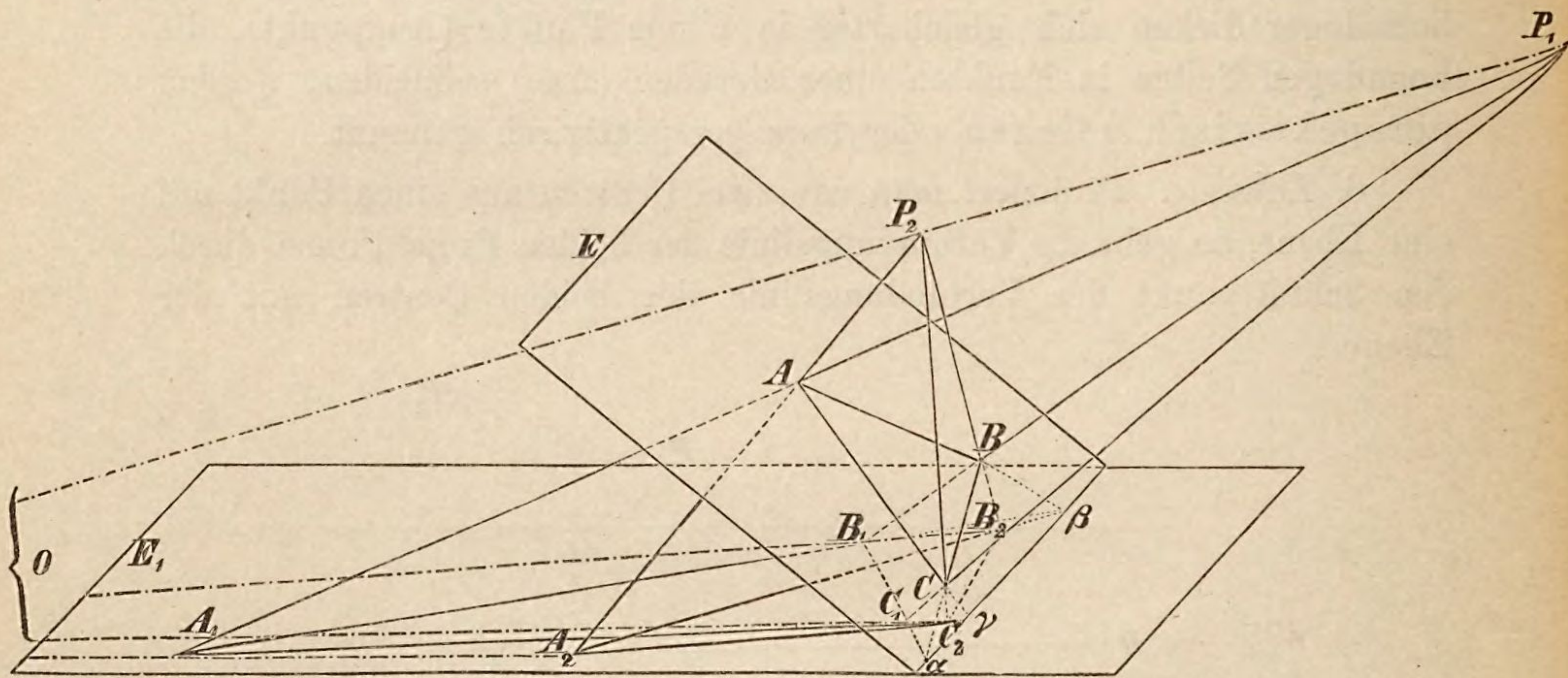


Fig. 5.

9. Gehen die drei Verbindungslinien je zweier entsprechender Ecken zweier Dreiecke gleichartig durch einen Punkt, so liegen die Dreiecke perspektivisch.

Beweis. Die beiden Dreiecke (Fig. 6) ABC und $A_1B_1C_1$ mögen so liegen, daß die drei Geraden AA_1 , BB_1 und CC_1 sich in einem Punkte O schneiden. Zieht man durch diesen Punkt O eine nicht in der Ebene

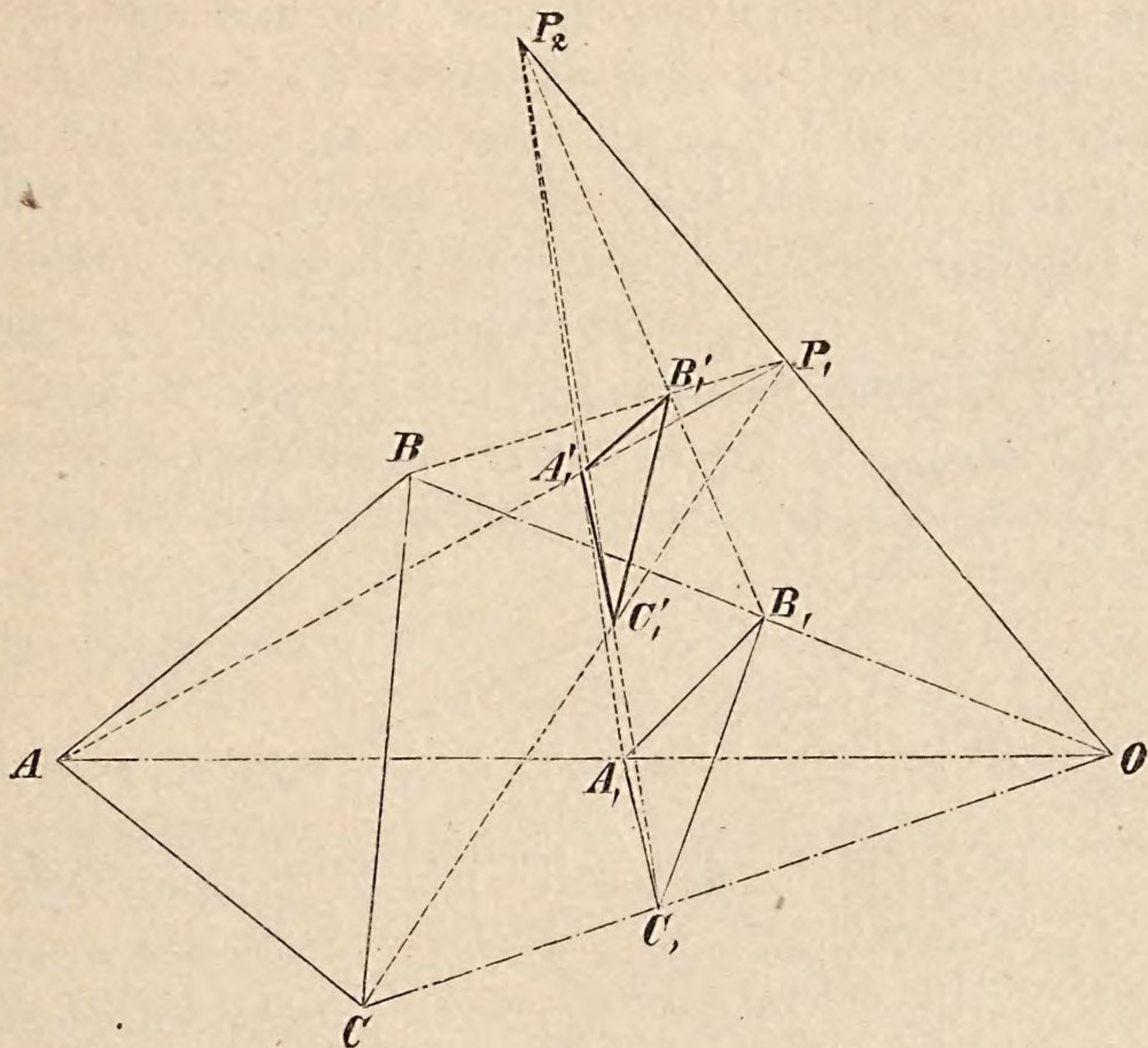


Fig. 6.

der beiden Dreiecke gelegene Gerade, nimmt auf derselben zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 an und verbindet P_1 mit den drei Ecken A, B, C , sowie P_2 mit A_1, B_1, C_1 , so müssen sich P_1A und P_2A_1 in einem Punkte schneiden, da sie beide in einer Ebene liegen; es sei dies A'_1 ; ebenso erhält man als Schnitt von P_1B und P_2B_1 einen Punkt B'_1 und als Schnitt von P_1C und P_2C_1 einen Punkt C'_1 ; daher kann man $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ als Projektionen des $\triangle A'_1B'_1C'_1$ von den Punkten P_1 und P_2 aus ansehen, und daher sind beide perspektivisch gelegen, oder die drei Schnittpunkte der Seiten AB und A_1B_1 , AC und A_1C_1 , BC und B_1C_1 liegen auf einer Geraden.

10. Liegen zwei Dreiecke in einer Ebene so, daß die drei Schnittpunkte je zweier entsprechender Seiten auf einer Geraden sich befinden, so liegen dieselben auch perspektivisch.

Beweis. Die beiden Dreiecke (Fig. 7) seien ABC und $A_1B_1C_1$, AB und A_1B_1 mögen sich in γ , BC und B_1C_1 in α und CA und C_1A_1 in β schneiden, wobei α, β, γ auf einer Geraden liegen. Denkt man sich nun $\triangle ABC$ um die Gerade $\alpha\beta\gamma$ als Axe gedreht, so bestimmen je zwei homologe Seiten der Dreiecke, wie AB und A_1B_1 , da sie sich in einem Punkte der Axe schneiden, eine Ebene und wir

erhalten somit drei Ebenen, die sich in den Verbindungslinien AA_1 , BB_1 , CC_1 schneiden; daher gehen diese drei Geraden durch einen

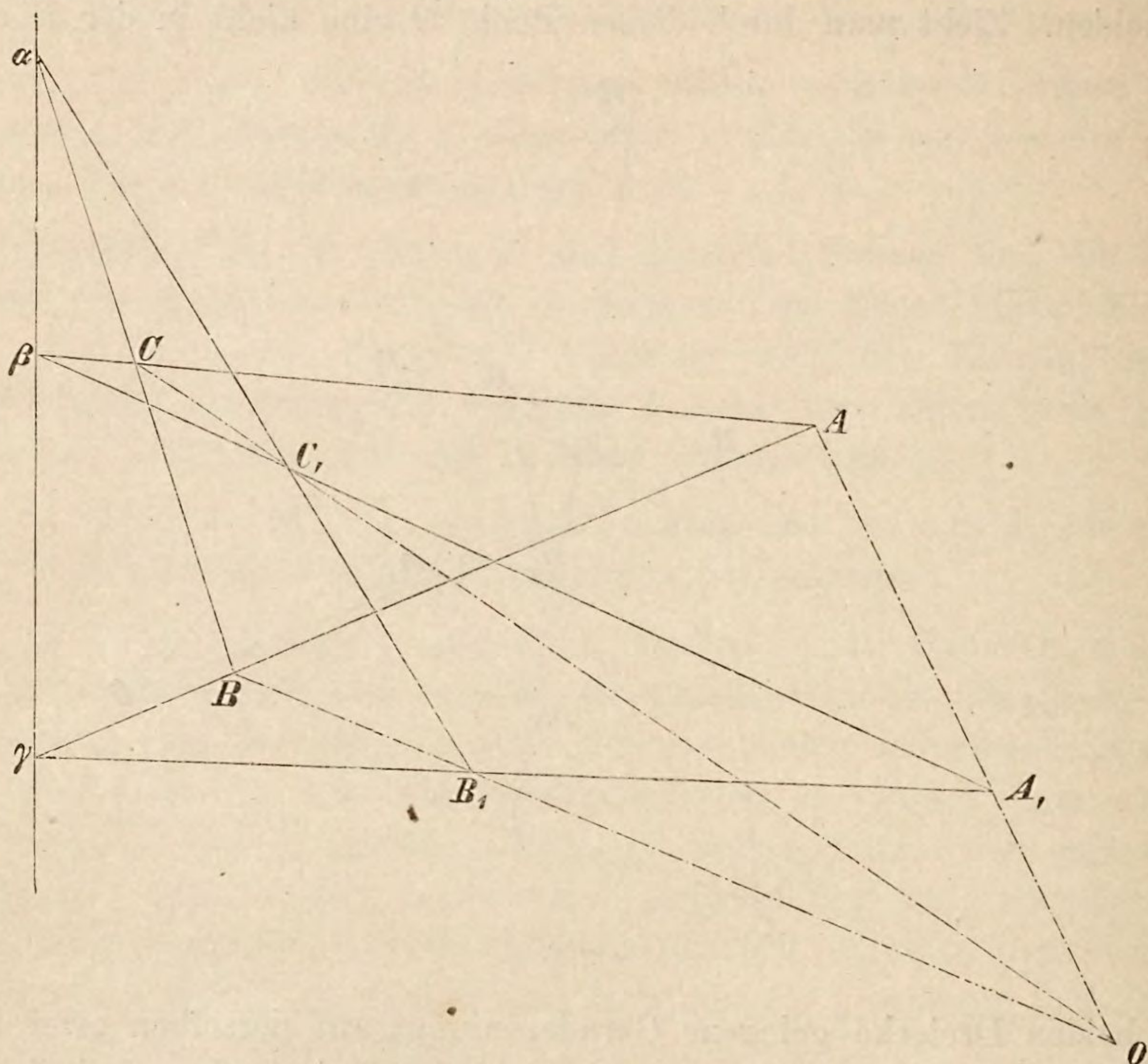


Fig. 7.

Punkt P , oder $\triangle ABC$ ist die Projektion des $\triangle A_1B_1C_1$ von P aus; somit müssen sich auch in der ursprünglichen Lage die Verbindungslinien homologer Ecken der beiden Dreiecke in einem Punkte schneiden.

11. Man kann zwei beliebige Dreiecke stets perspektivisch legen. (Alle Dreiecke sind projektivisch.)

Beweis. ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 8) seien zwei beliebige Dreiecke; man wähle nun einen Punkt P so, daß wenn man ihn mit den 3 Ecken

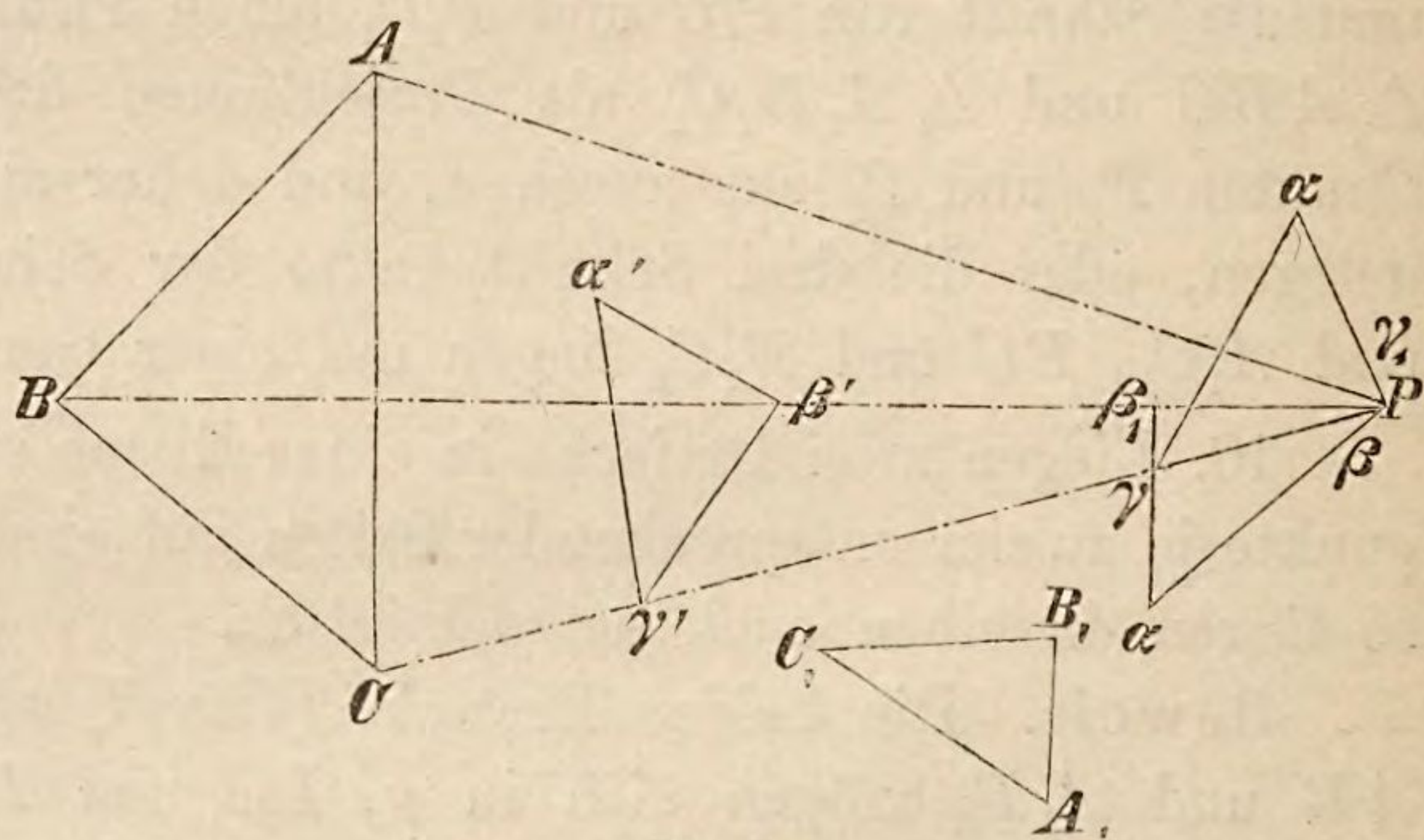


Fig. 8.

von $\triangle ABC$ verbindet $\angle APC < \angle A_1P C_1$ ist. Nun bringe man $\triangle A_1B_1C_1$ in die Lage, daß B_1 auf P und C_1 in PC fällt, so muß A_1 außerhalb des $\triangle APC$, jenseit PA fallen; diese Lage von $\triangle A_1B_1C_1$ sei

$\alpha\beta\gamma$. Bewegt man nunmehr das Dreieck so, daß die Ecke B_1 (β) stets auf PB bleibt und sich dem Punkte B nähert, während C_1 (γ) auf PC sich bewegt, so muß A_1 (α) sich immer mehr dem Strahle PA nähern. Bewegt man das Dreieck so lange bis C_1 (γ) auf P fällt, während B_1 (β) auf PB bleibt, so muß A_1 jetzt auf die umgekehrte Seite von PA fallen; es sei dies die Lage $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; bei der Drehung muß daher $A_1B_1C_1$ einmal in die Lage kommen, daß A_1 auf PA liegt, während B_1 auf PB und C_1 auf PC sich befindet; in diesem Falle liegen die Dreiecke perspektivisch.

12. Zwei in einer Ebene perspektivisch gelegene Figuren lassen sich stets durch Drehung der einen um die Axe in die Lage bringen, daß die eine die homocentrische Projektion der andern ist.

Beweis. Durch Zerlegung der Figuren in Dreiecke.

13. Zieht man von drei Punkten einer Geraden je zwei Strahlen, so schneiden sich je drei Diagonalen der dreihierdurch erzeugten Vierecke in einem Punkte.

Beweis. Durch die drei Punkte (Fig. 9) α, β, γ der Geraden t ziehe man die Strahlen $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, so bilden je drei (z. B. $a_1b_2c_2$ und $a_2b_1c_1$) zwei perspektivisch gelegene Dreiecke, deren Augpunkt gleichzeitig den Schnittpunkt der Diagonalen der Vierecke bildet.

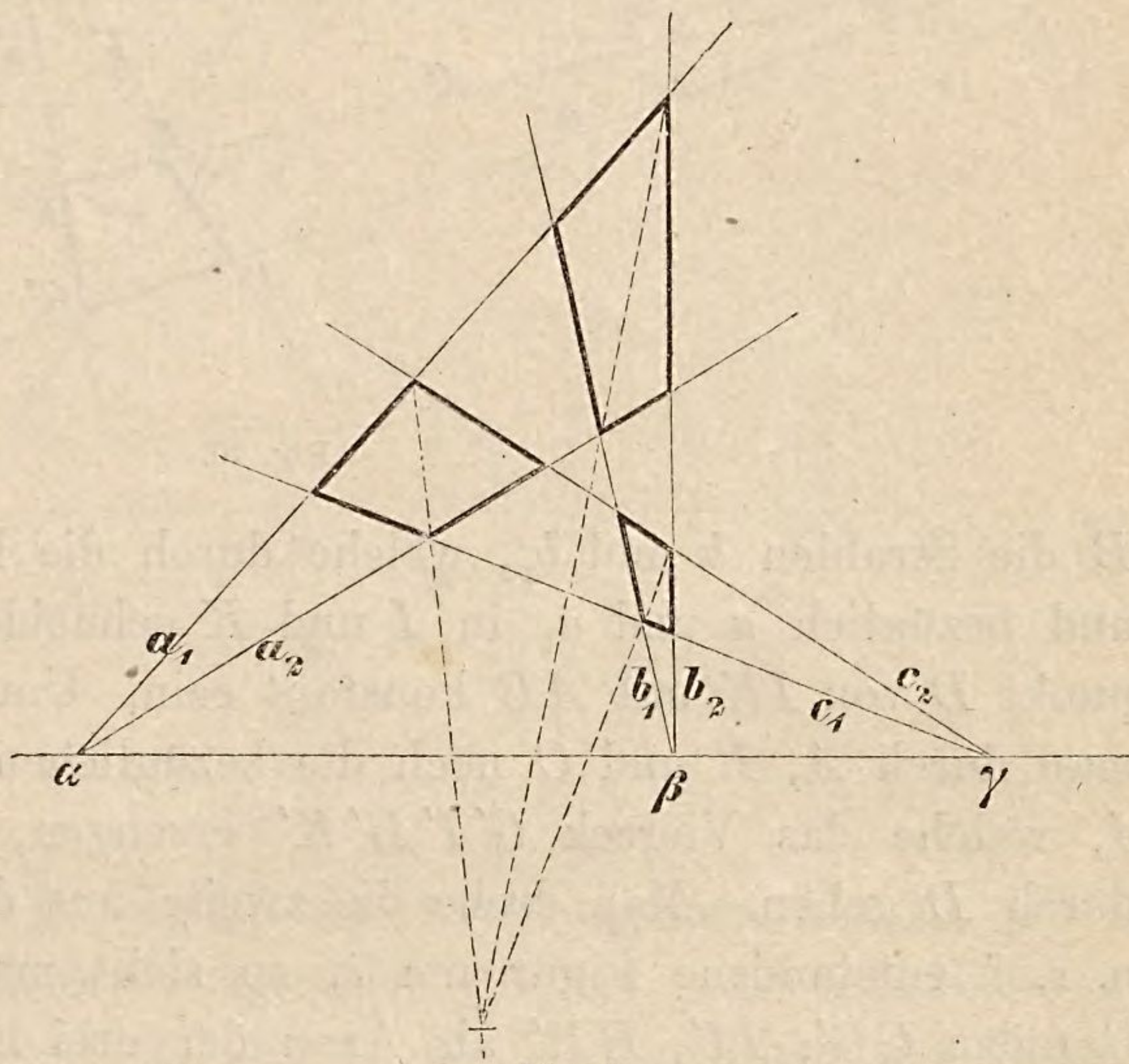


Fig. 9.

§ 3. Harmonische Systeme.

1. Nimmt man auf einer Axe drei feste Punkte an, zieht durch einen derselben einen, durch die beiden anderen je zwei Strahlen, die sich gegenseitig auf dem ersten schneiden und zieht die zweite Diagonale in dem so entstandenen Vierseit, so ist der Schnittpunkt derselben mit der gegebenen Axe konstant.

Beweis. Es seien (Fig. 10) A, B, C drei Punkte auf der Axe t ; zieht man durch C einen Strahl c , durch A die beiden Strahlen a und a_1 , welche c in G und H schneiden mögen; ziehe ferner noch durch

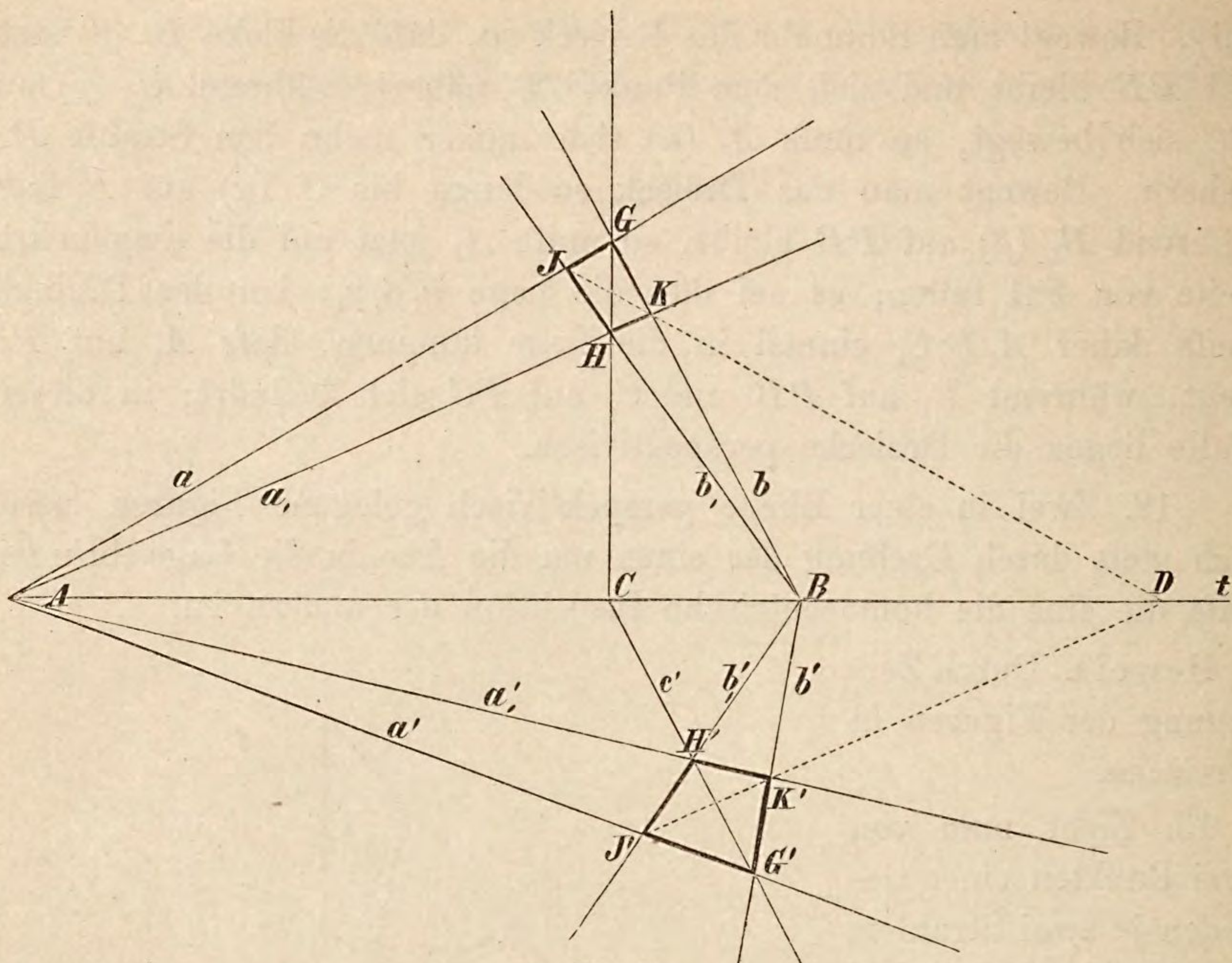


Fig. 10.

B die Strahlen b und b_1 , welche durch die Punkte G und H gehen und bezüglich a und a_1 in I und K schneiden, so soll der Schnittpunkt D von IK mit AB konstant sein. Um dies zu beweisen, ziehe man durch A , B und C noch die bezüglichen Strahlen a' , a'_1 , b' , b'_1 , c' , welche das Viereck $G'I'H'K'$ erzeugen, so soll $I'K'$ ebenfalls durch D gehen. Man drehe die zweite aus den fünf Strahlen a' , a'_1 u. s. f. entstandene Figur um t , so sieht man sofort, daß die drei Geraden GG' , II' , HH' als Axen der drei Ebenen (aa') , $(b_1b'_1)$ und (cc') sich in einem Punkte schneiden müssen; ebenso müssen sich aber auch die Geraden GG' , KK' und II' in einem Punkte schneiden, es gehen somit alle vier Geraden GG' , HH' , II' , KK' durch einen Punkt, oder die beiden Vierecke $GCHK$ und $G'I'H'K'$ liegen in der ursprünglichen Figur perspektivisch, d. h. die Diagonalen IK und $I'K'$ schneiden sich in einem Punkte D der Axe.

2. *Erklärungen.* Die Schnittpunkte der Gegenseiten eines vollständigen Vierseits und die Schnittpunkte der durch jene bestimmten Diagonale mit den beiden anderen Diagonalen bilden eine harmonische Punktreihe. Die Endpunkte der Diagonale bilden das eine Paar zugeordneter Punkte; je ein Paar zugeordneter Punkte wird durch das andere Paar harmonisch getrennt. Verbindet man einen Punkt mit den vier harmonischen Punkten, so erhält man ein harmonisches Büschel, das

von jeder Transversale wieder in einer harmonischen Punktreihe geschnitten wird.

3. *Lehrsatz.* Die Strahlen eines harmonischen Büschels kann man als die Diagonalen und Halbierungslinien eines Parallelogramms bez. als deren Projektionen ansehen.

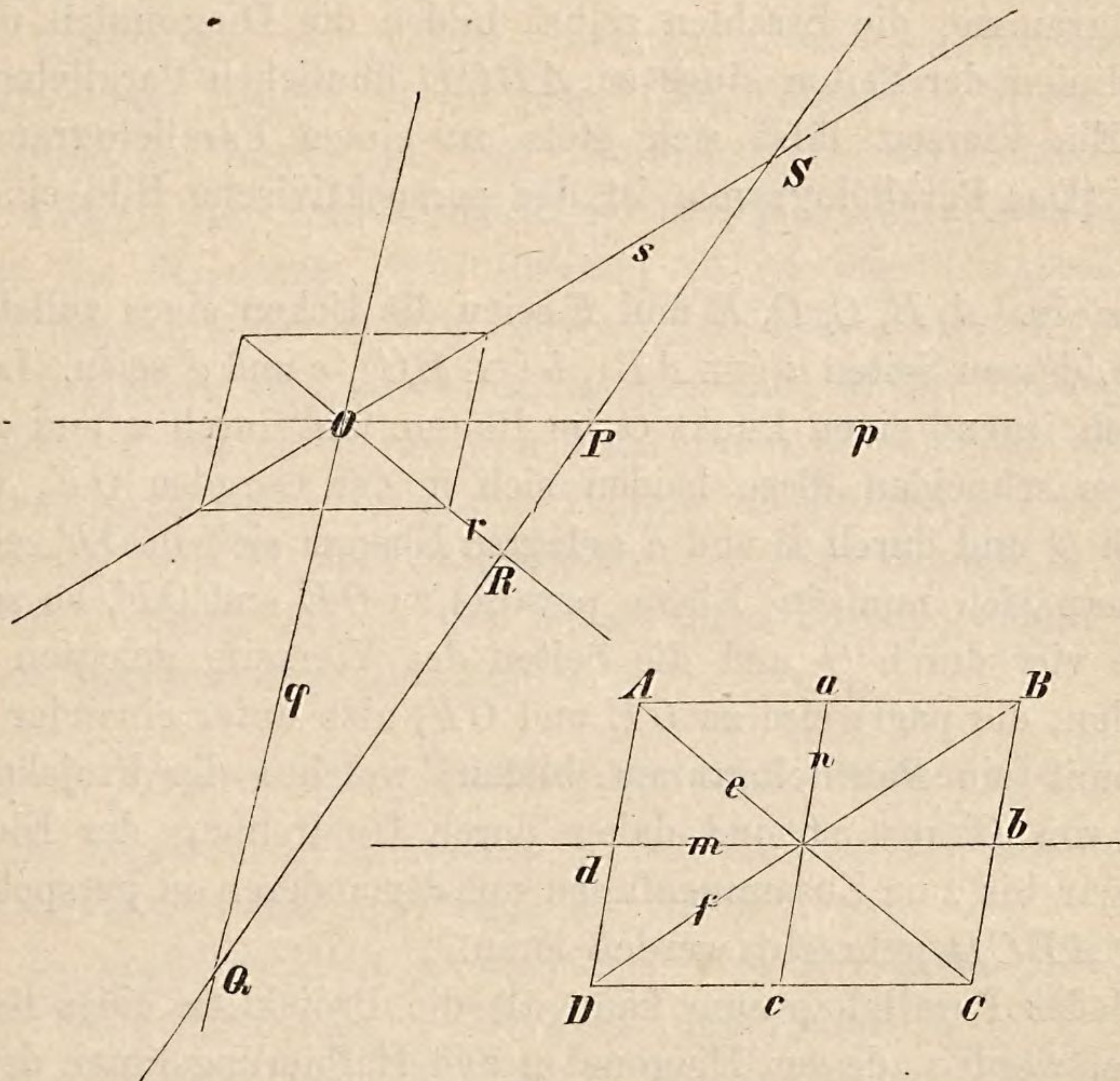


Fig. 11.

Beweis. $ABCD$ (Fig. 11) sei ein Parallelogramm, dessen Seiten wir durch a, b, c, d und dessen Diagonalen wir mit e und f bezeichnen; die (durch den Mittelpunkt gehenden) Halbierungslinien der Seiten seien m und n . Legt man nun durch einen beliebigen Punkt O (außerhalb der Ebene des Parallelogramms) Ebenen durch a, m und c , so schneiden sich diese in einer Geraden p , die durch O geht; ebenso schneiden sich die durch O und die Geraden b, n und d gelegten Ebenen in einer Geraden q , die durch O geht. Die durch p und q bestimmte Ebene E wird nun von den beiden durch O und die Diagonalen e und f bestimmten Ebenen in zwei Geraden r und s geschnitten. Zieht man nun in E eine Transversale, welche p, q, r und s in den Punkten P, Q, R und S treffe, und legt man durch diese Transversale eine beliebige Ebene E_1 , so bilden die Schnittlinien a_1 und c_1 dieser Ebene mit den durch O und a und c gelegten Ebenen zwei Seiten eines Vierseits, die sich in P schneiden; ebenso sind b_1 und d_1 — die Schnittlinien von E_1 mit den durch O und b und d bestimmten Ebenen

— die beiden anderen Seiten des Vierseits, e_1 und f_1 — die Schnittlinien von E_1 mit (Oe) und (Of) — die Diagonalen des Vierseits; daher bildet $PQRS$ eine harmonische Punktreihe, $O \cdot pqrs$ ein harmonisches Büschel; gleichzeitig ist aber auch das Büschel $O \cdot pqrs$ die Projektion der Diagonalen und Halbierungslinien der Seiten eines Parallelogramms; die Strahlen selbst bilden die Diagonalen und Halbierungslinien der Seiten eines zu $ABCD$ ähnlichen Parallelogramms.

4. Ein Vierseit läßt sich stets zu einem Parallelogramm projizieren. (Das Parallelogramm ist das perspektivische Bild eines Vierseits.)

Beweis. A, B, C, D, E und F seien die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten $a (\equiv AB)$, $b (\equiv BC)$, c und d seien. Legt man nun durch irgend einen Punkt O im Raume und durch a und c je eine Ebene, so schneiden diese beiden sich in der Geraden OE , während die durch O und durch b und d gelegten Ebenen sich in OF schneiden. Denkt man sich nun eine Ebene parallel zu OE und OF , so schneidet diese die vier durch O und die Seiten des Vierseits gelegten Ebenen in Geraden, die paarweise zu OE und OF , also unter einander parallel sind, somit ein Parallelogramm bilden, welches die Projektion von $ABCD$ von O aus ist und daher durch Umdrehung der Ebene der einen Figur bis zum Zusammenfallen mit der anderen in perspektivische Lage zu $ABCD$ gebracht werden kann.

5. Jedes Parallelogramm kann als die Projektion eines Rechtecks betrachtet werden, dessen Diagonalen und Halbierungslinien der Seiten den homologen Stücken des Parallelogramms entsprechen.

6. Jedes harmonische Büschel kann als die Projektion der Diagonalen und Halbierungslinien der Seiten eines Rechtecks betrachtet werden.

7. Die Diagonalen und Halbierungslinien der Seiten eines Rechtecks bilden ein harmonisches Büschel.

8. Stehen zwei zugeordnete Strahlen eines harmonischen Büschels senkrecht auf einander, so halbieren sie die Winkel der beiden anderen zugeordneten Strahlen.

9. Das Doppelverhältnis einer harmonischen Punktreihe und das eines harmonischen Büschels ist gleich der negativen Einheit.

10. Auf jeder Transversale, welche parallel einem Strahle eines harmonischen Büschels ist, schneiden die anderen Strahlen gleiche Stücke ab.

11. Es giebt stets in der Ebene zwei Punkte, von denen aus die drei Strecken einer harmonischen Punktreihe unter halben rechten Winkeln erscheinen; diese Punkte liegen in Bezug auf den Träger der harmonischen Punktreihe symmetrisch und sind die Schnittpunkte der

beiden Kreise, die man über den Abständen je zweier zugeordneter Punkte als Durchmesser ziehen kann.

12. In einem vollständigen Viereck wird jede Seite durch den in ihr liegenden Diagonalpunkt und die Verbindungslinie der beiden anderen Diagonalpunkte harmonisch geteilt.

13. Liegen die vier Ecken eines vollständigen Vierecks auf der Peripherie eines Kreises, so ist jeder Diagonalpunkt Pol zu der Verbindungslinie der beiden anderen Diagonalpunkte als Polare.

14. Liegen vier Schnittpunkte der Seiten eines vollständigen Vierecks auf der Peripherie eines Kreises, so ist jede Diagonale Polare zum Schnittpunkte der beiden anderen Diagonalen als Pol.

15. Projiziert man zwei Parallelogramme, welche so liegen, daß die Diagonalen des einen mit den Mittellinien des anderen zusammenfallen und umgekehrt, von einem Punkte im Raume auf eine Ebene, so schneiden sich je zwei Gegenseiten der Projektionen in vier harmonischen Punkten und je vier durch einen Punkt gehende Strahlen bilden ein harmonisches Büschel.

§ 4. Projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel.

1. Die Doppelverhältnisse von je vier homologen Elementen zweier projektivischer Systeme sind einander gleich.

1^a. In projektivischen Systemen sind je vier homologe Elemente entweder beide harmonisch, oder beide anharmonisch.

2. Gehen die homologen Strahlen zweier Büschel durch die homologen Punkte zweier projektivischer Punktreihen, so sind die Büschel projektivisch.

3. Liegen zwei projektivische Punktreihen so, daß der Schnittpunkt der beiden Träger für beide Systeme homolog ist, so liegen dieselben perspektivisch.

Beweis. Es sei (Fig. 12) $ABCDE \dots \wedge A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \dots$ und die beiden Träger der Punktreihen mögen sich in den homologen Punkten AA_1 schneiden; man verbinde alsdann B mit B_1 und C mit C_1 und verlängere diese beiden Geraden bis zu ihrem Schnitt-

Die homologen Strahlen zweier projektivischer Büschel erzeugen auf Transversalen projektivische Punktreihen.

Fällt ein Paar homologer Strahlen zweier projektivischer Büschel in eine Gerade, so liegen diese Büschel perspektivisch.

Beweis. Es sei (Fig. 13) $O \cdot abcde \dots \wedge O_1 \cdot a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 \dots$ und die Gerade OO_1 falle mit einem Paare homologer Strahlen z. B. b und b_1 zusammen; man verbinde den Schnittpunkt A der Strahlen a und a_1 mit C , dem Schnittpunkte von c und c_1 . Ein

punkte, es sei S . Verbindet man nun S mit einem beliebigen Punkte (z. B.) D der ersten Reihe, so muß — wie man sofort ersieht. — SD den zweiten Träger in D_1 schneiden, weil $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$ ist.

beliebiger vierter Strahl d schneide AC in D , verbindet man dann D mit O_1 , so muß O_1D mit d_1 zusammenfallen, weil $(abcd) = (a_1b_1c_1d_1)$ und $(abcd) = (a_1b_1c_1O_1D)$ ist.

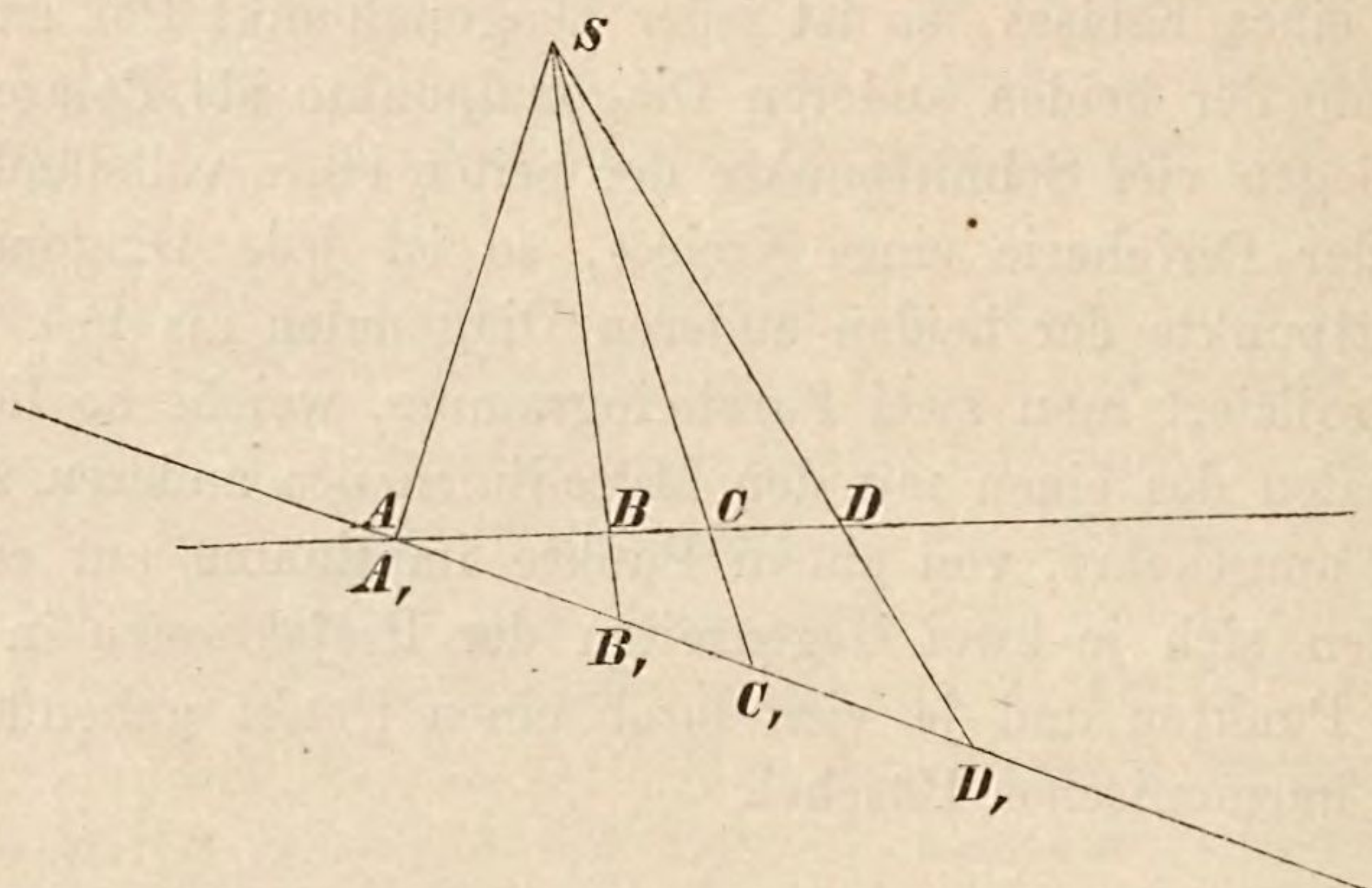


Fig. 12.

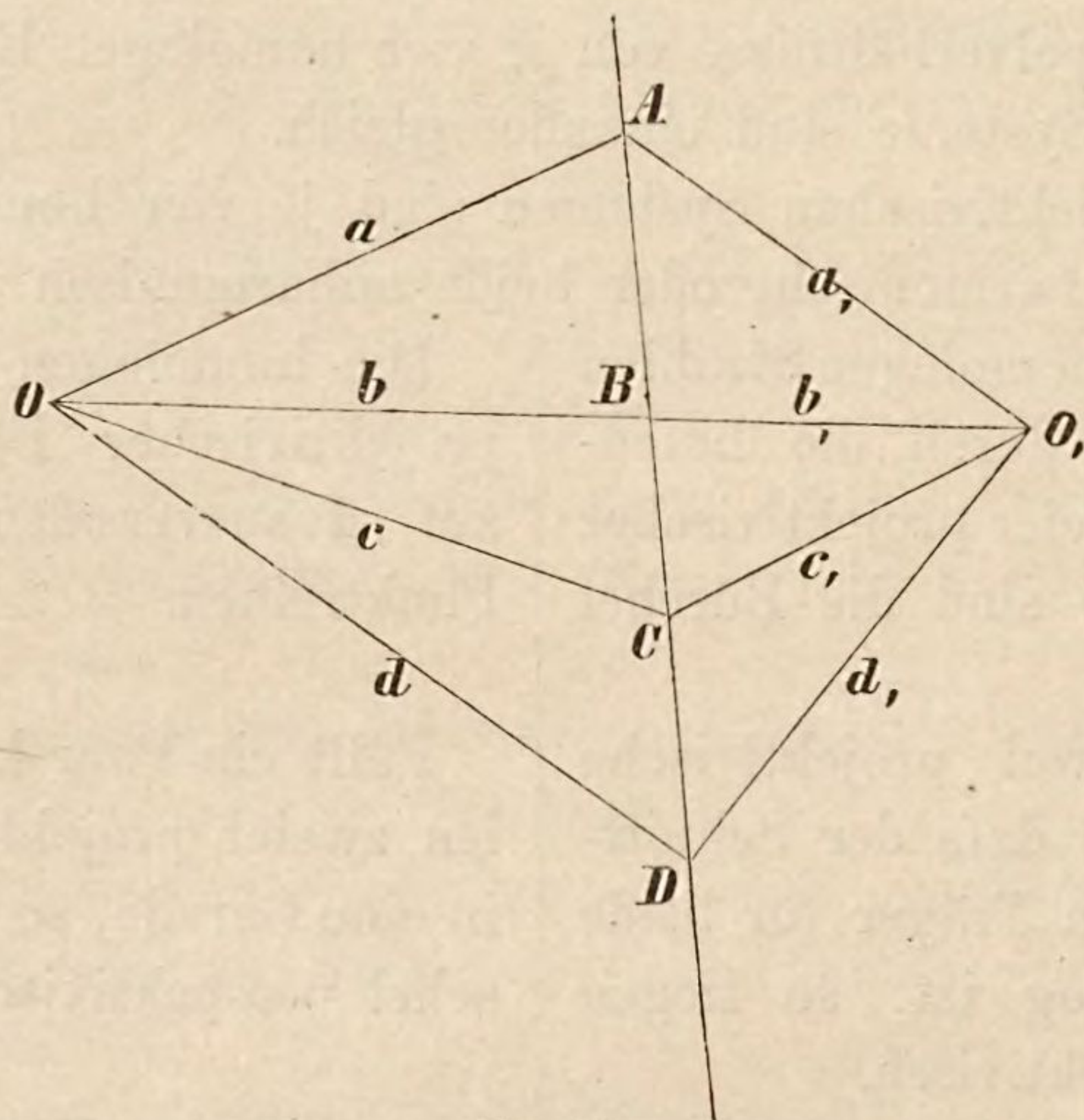


Fig. 13.

4. Zwei schiefe projektivische $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punktreihen} \\ \text{Strahlenbüschel} \end{array} \right\}$ können stets perspektivisch gelegt werden.

5. Nimmt man auf der Verbindungslinie eines Paares homologer Punkte in zwei schiefen projektivischen Reihen zwei beliebige

Zieht man durch den Schnittpunkt eines Paares homologer Strahlen zweier projektivischer Büschel zwei Transversalen, so erzeugen

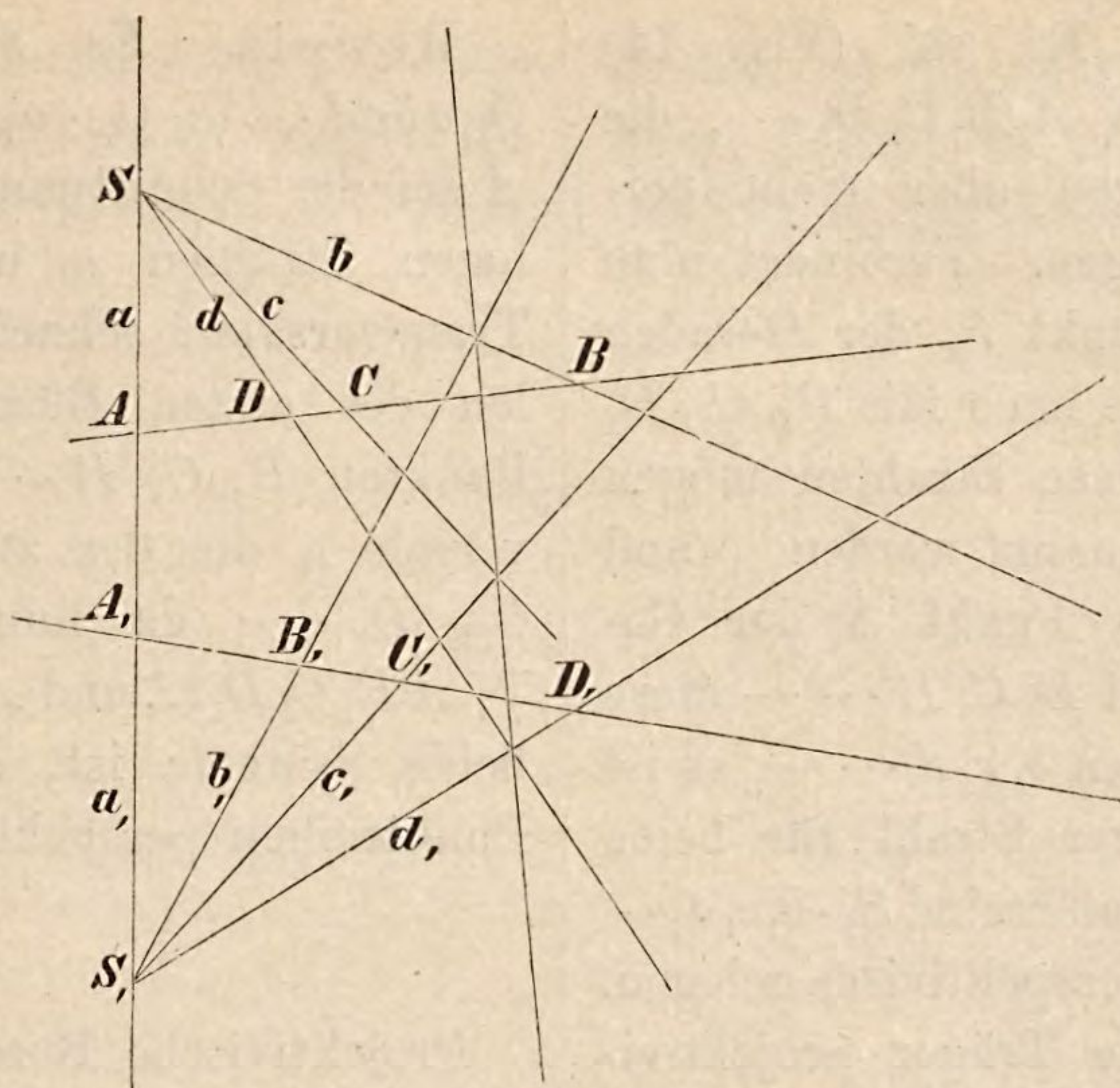


Fig. 14.

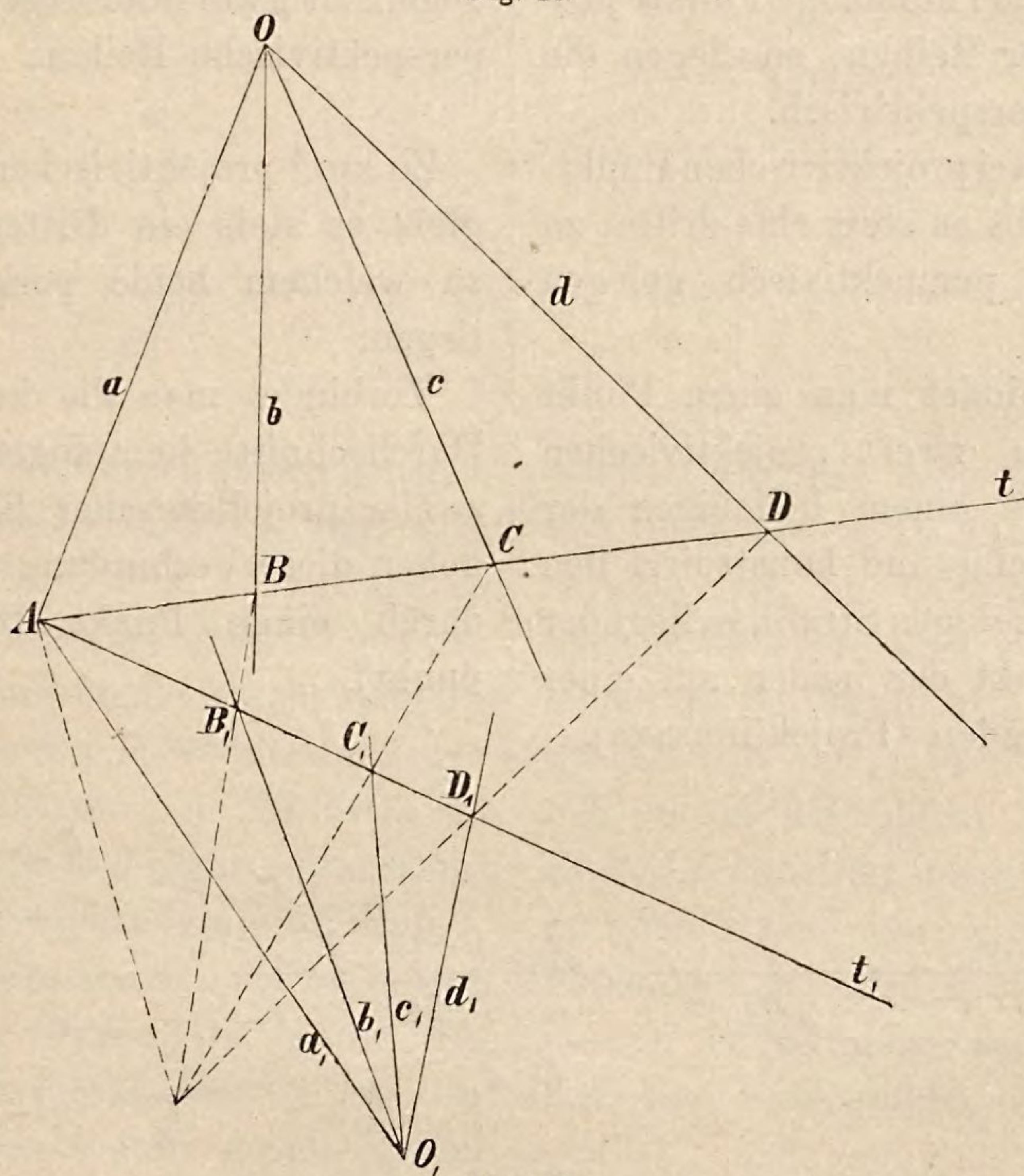


Fig. 15.

Punkte als Träger von Büscheln an, deren Strahlen durch die Punkte der Reihen gehen, so sind die Büschel perspektivisch gelegen.

die Büschel auf ihnen perspektivisch gelegene Punktreihen.

Beweis. Es sei (Fig. 14) $ABCD \dots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$, die Systeme mögen aber nicht perspektivisch liegen. Verbindet man nun einen Punkt S_1 der Geraden AA_1 der Reihe nach mit B_1, C_1, D_1 u. s. f. — diese Strahlen mögen $b_1, c_1, d_1 \dots$ genannt werden — und einen zweiten Punkt S der Geraden AA_1 mit $B, C, D \dots$ — diese Strahlen heißen $b, c, d \dots$ —, so ist AA_1 homologer Strahl für beide Systeme und daher sind $S_1 \cdot b_1 c_1 d_1 \dots$ und $S \cdot b c d \dots$ perspektivisch gelegen.

5^a. Sind die Träger projektivischer Büschel homologe Punkte projektivischer Reihen, so liegen die Büschel perspektivisch.

5^b. Zu zwei projektivischen Punktreihen giebt es stets eine dritte, zu der beide perspektivisch gelegen sind.

6. Verbindet man einen Punkt einer von zwei projektivischen Reihen mit einem beliebigen der zweiten Reihe und konstruiert den hierzu homologen Strahl, so liegt der Schnittpunkt der beiden auf einer festen Geraden (Projektionsaxe).

Beweis. Es sei (Fig. 15) $O \cdot abcd \dots \overline{\wedge} O_1 \cdot a_1 b_1 c_1 d_1 \dots$ und A sei der Schnittpunkt der homologen Strahlen a und a_1 . Die Transversale t schneide die Strahlen des ersten Büschels in den Punkten $B, C, D \dots$, die Transversale t_1 die des zweiten in $B_1, C_1, D_1 \dots$; da nun $ABCD \dots \overline{\wedge} AB_1 C_1 D_1 \dots$ und A homolog für beide Systeme ist, so liegen die Punktreihen perspektivisch.

Projektivische Büschel erzeugen gegenseitig auf homologen Strahlen perspektivische Reihen.

Zu zwei projektivischen Büscheln giebt es stets ein drittes Büschel, zu welchem beide perspektivisch liegen.

Verbindet man die kreuzweisen Durchschnitte homologer Strahlen zweier projektivischer Büschel, so gehen diese Verbindungslinien alle durch einen Punkt (den Augpunkt).

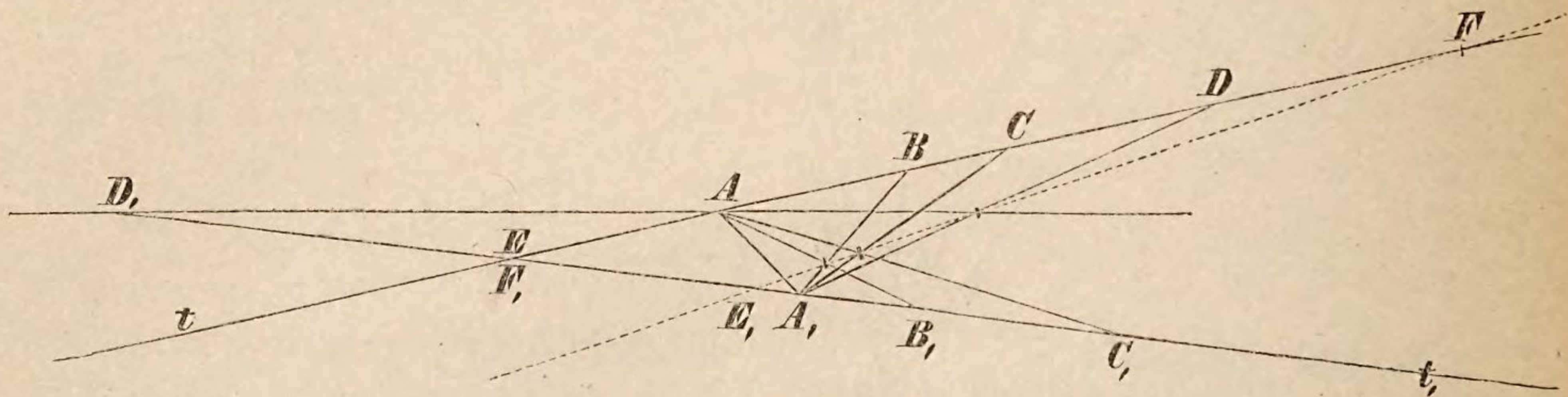


Fig. 16.

Beweis. Es sei (Fig. 16) $ABCD \dots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1$ und es sei E der Schnittpunkt der beiden Träger t und t_1 der Reihen. Nimmt

Beweis. Es sei (Fig. 17) $S \cdot abcd \dots \overline{\wedge} S_1 \cdot a_1 b_1 c_1 d_1 \dots$, dann erzeugt das erstere Büschel auf a_1 und das letztere auf a je eine

man nun die homologen Punkte A und A_1 zu Trägern zweier Büschel, so sind $A \cdot B_1 C_1 D_1 \dots$ und

Reihe, die perspektivisch zu einander liegen; daher schneiden sich die Verbindungslinien der Schnitt-

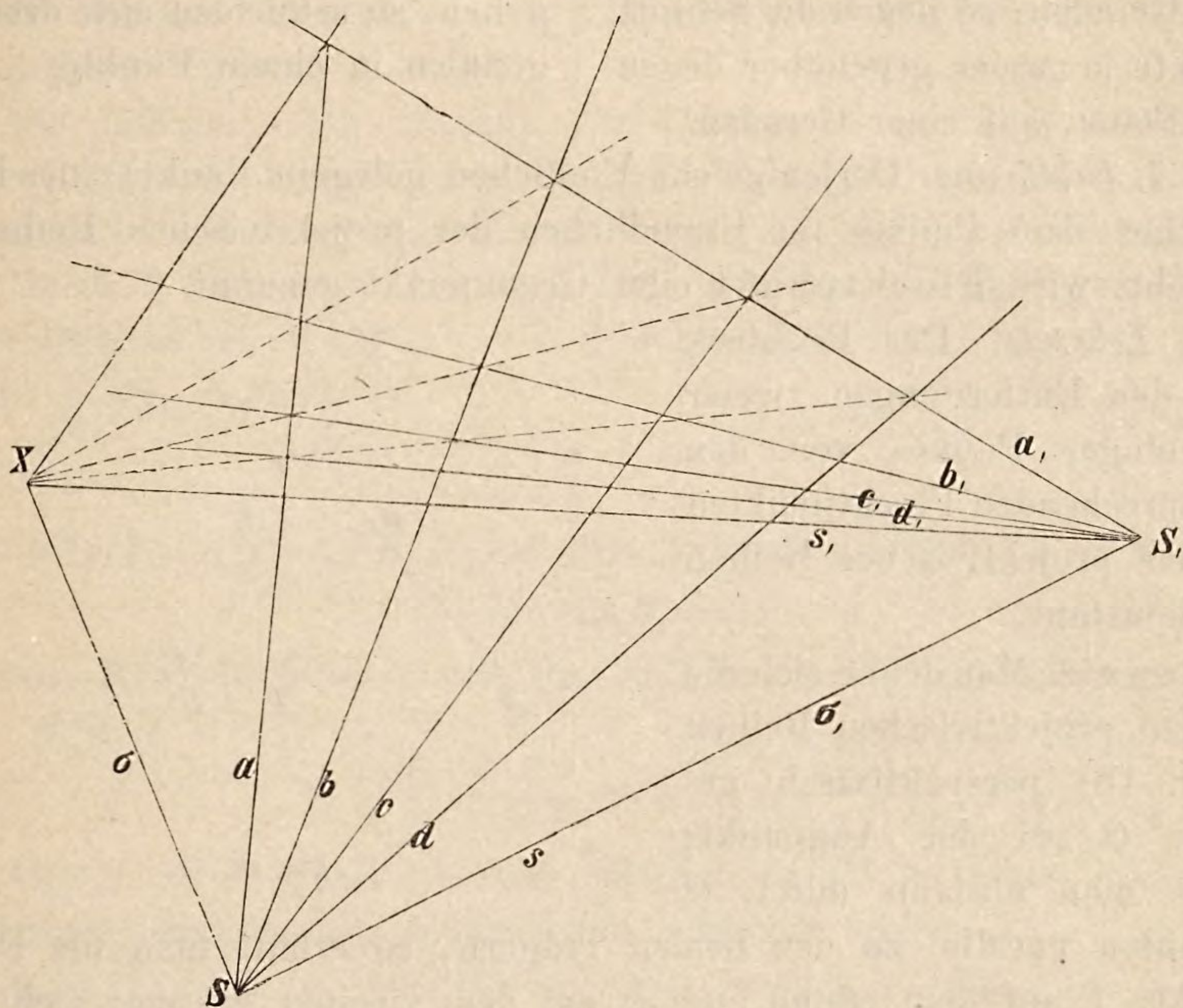


Fig. 17.

$A_1 \cdot BCD \dots$ perspektivisch gelegen, daher schneiden sich AB_1 und A_1B , AC_1 und A_1C u. s. f. in Punkten einer Geraden (der Projektionsaxe); diese letztere schneidet den Träger t in einem Punkte F , dessen homologer Punkt F_1 in t_1 mit dem Schnittpunkt E der beiden Träger zusammenfällt; die Projektionsaxe schneide t_1 in einem Punkte E_1 , so ist dessen homologer Punkt im ersten Systeme der Punkt E . Da nun die Projektionsaxe stets durch E_1 und F gehen muß, welches Punktpaar man als Träger der Büschel nehmen mag, so schneiden sich AB_1 und A_1B , BC_1 und B_1C u. s. f. auf Punkten derselben Geraden E_1F .

punkte ab_1 und a_1b , ac_1 und a_1c u. s. f. in einem Punkte X . Dem Strahle SS_1 im Systeme S entspricht daher in dem zweiten Systeme S_1 der Strahl S_1X und dem Strahle S_1S im zweiten entspricht SX im ersten; daher bleibt der Punkt X konstant, mag man a und a_1 oder irgend ein anderes Paar homologer Strahlen b, b_1 oder c, c_1 u. s. f. zu Trägern der perspektivischen Punktreihen nehmen.

6^a. Liegen die auf einander folgenden Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei sich schneidenden Geraden, so liegen die Schnittpunkte je zweier gegenüber liegender Seiten auf einer Geraden.

Wenn je drei nicht auf einander folgende Seiten eines Sechsecks durch einen festliegenden Punkt gehen, so schneiden sich drei Diagonalen in einem Punkte.

7. *Erklärung*. Derjenige (im Endlichen gelegene Punkt) einer Reihe, welcher dem Punkte im Unendlichen der projektivischen Reihe entspricht, wird Fluchtpunkt oder Gegenpunkt genannt.

8. *Lehrsatz*. Das Rechteck aus den Entfernungen zweier homologer Punkte von den entsprechenden Fluchtpunkten zweier projektivischer Reihen ist konstant.

Beweis. Man denke sich die beiden projektivischen Reihen (Fig. 18) perspektivisch gelegt, O sei der Augpunkt; zieht man alsdann durch O

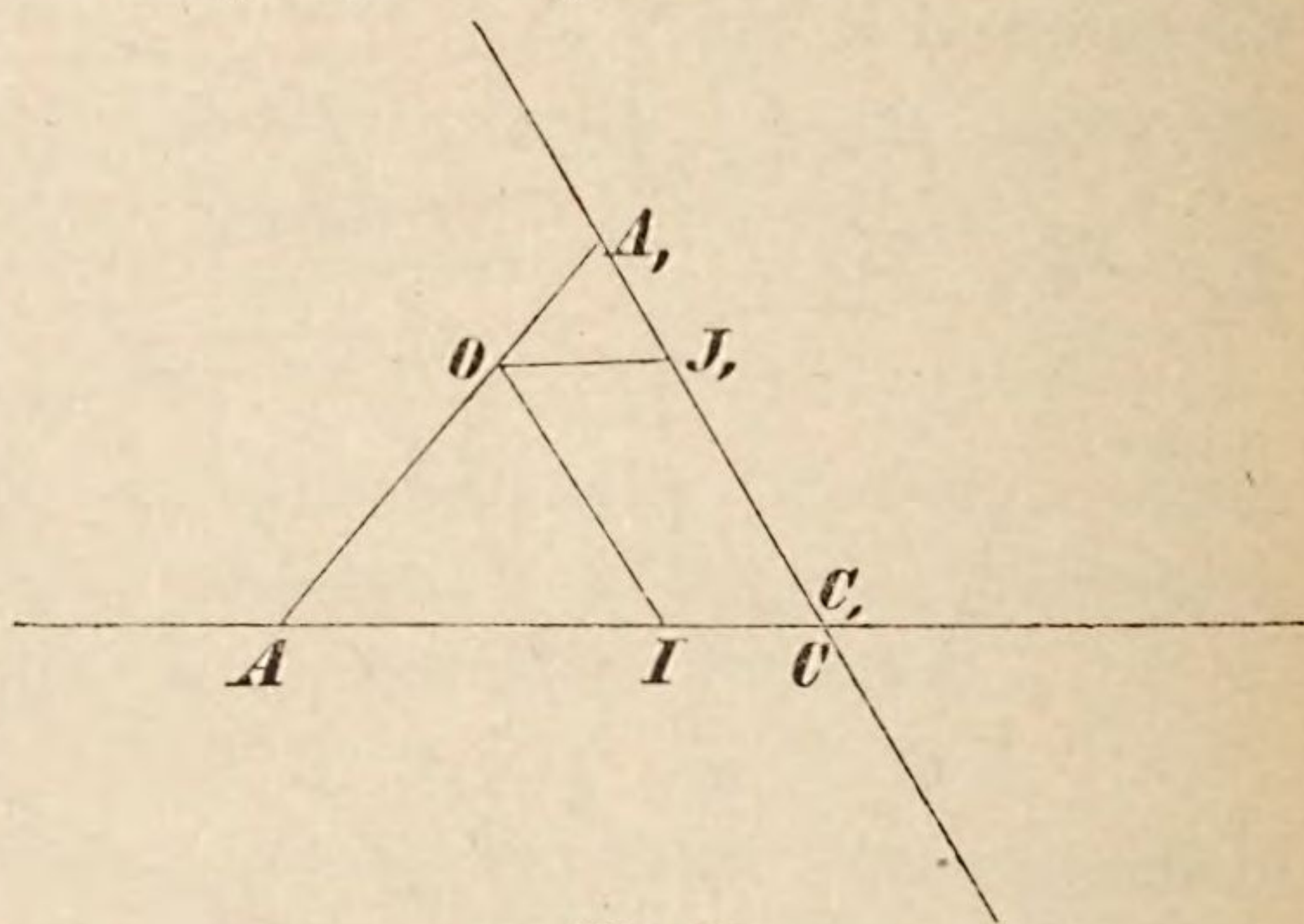


Fig. 18.

Strahlen parallel zu den beiden Trägern, so erhält man die Fluchtpunkte I auf dem ersten und J_1 auf dem zweiten System; zieht man nun irgend einen Strahl z. B. AOA_1 , so ist $\triangle AOI \sim \triangle OA_1J_1$; daher ist

$$AI : OI = OJ_1 : A_1J_1$$

oder

$$AI \cdot A_1J_1 = OI \cdot OJ_1 = \text{konst.}$$

[In projektivischen Punktreihen sind die Doppelverhältnisse von je vier homologen Punktpaaren einander gleich; also

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

Nimmt man nun die Fluchtpunkte und ihre homologen im Unendlichen gelegenen Punkte, so ist

$$(ABI\infty) = (A_1B_1\infty J_1),$$

$$\frac{AI}{IB} : \frac{A\infty}{\infty B} = \frac{A_1\infty}{\infty B_1} : \frac{A_1J_1}{J_1B},$$

oder

$$\frac{AI}{IB} = 1 : \frac{A_1J_1}{J_1B_1}, \text{ d. h. } AI \cdot A_1J_1 = BI \cdot B_1J_1 = \text{konst.}]$$

9. Bewegen sich zwei Punkte auf zwei Geraden so, daß das Rechteck aus ihren Entfernungen von zwei auf diesen Geraden festliegenden Punkten konstant bleibt, so bilden die Punkte in ihren ent-

sprechenden Lagen projektivische Reihen, deren Fluchtpunkte die beiden festliegenden Punkte sind.

10. *Erklärung.* Das Produkt aus den Abständen zweier homologer Punkte von den Fluchtpunkten in projektivischen Punktreihen wird die Potenz der letzteren genannt.

11. *Lehrsatz.* Die Summe der Quotienten aus den Abständen zweier homologer Punkte von den Fluchtpunkten und zwei anderen homologen Punkten projektivischer Reihen ist gleich der Einheit.

Beweis. Es seien AA_1 und BB_1 zwei Paare homologer Punkte in projektivischen Reihen, deren Fluchtpunkte I und J_1 und deren Potenz p sei, alsdann ist:

$$AI \cdot A_1 J_1 = p$$

oder

$$(AB + BI)(A_1 B_1 + B_1 J_1) = AB \cdot A_1 B_1 + AB \cdot B_1 J_1 + BI \cdot A_1 B_1 + BI \cdot B_1 J_1 = p;$$

da nun $BI \cdot B_1 J_1 = p$ ist, so ergibt sich durch Division mit $BA \cdot B_1 A_1$:

$$\frac{B_1 J_1}{B_1 A_1} + \frac{BI}{BA} = 1, \text{ q. e. d.}$$

12. In zwei projektivischen Büscheln giebt es stets zwei Paar homologer Strahlen, die senkrecht zu einander stehen.

Beweis. Es sei (Fig. 19) $S \cdot abcd \dots \wedge S_1 \cdot a_1 b_1 c_1 d_1 \dots$ und die beiden Büschel seien perspektivisch gelegt, es mögen z. B. a und a_1 mit SS_1 zusammenfallen; zieht man alsdann zu S und S_1 die Symmetrieaxe, so schneidet diese die Axe der perspektivischen Büschel in einem Punkte X ; der Kreis um X mit dem Radius XS möge die Projektionsaxe in I und J schneiden, alsdann stehen die durch diese Punkte gehenden Strahlen i, j des einen und die i_1, j_1 des anderen auf einander senkrecht.

13. In zwei projektivischen Büscheln ist das Produkt der trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel konstant, welche zwei homologe Strahlen mit je einem nicht homologen der beiden festen zu einander senkrechten Strahlen bilden.

Beweis. Es sei $i \perp j, i_1 \perp j_1, S \cdot abc \dots ij \wedge S_1 \cdot a_1 b_1 c_1 \dots i_1 j_1$, so ist

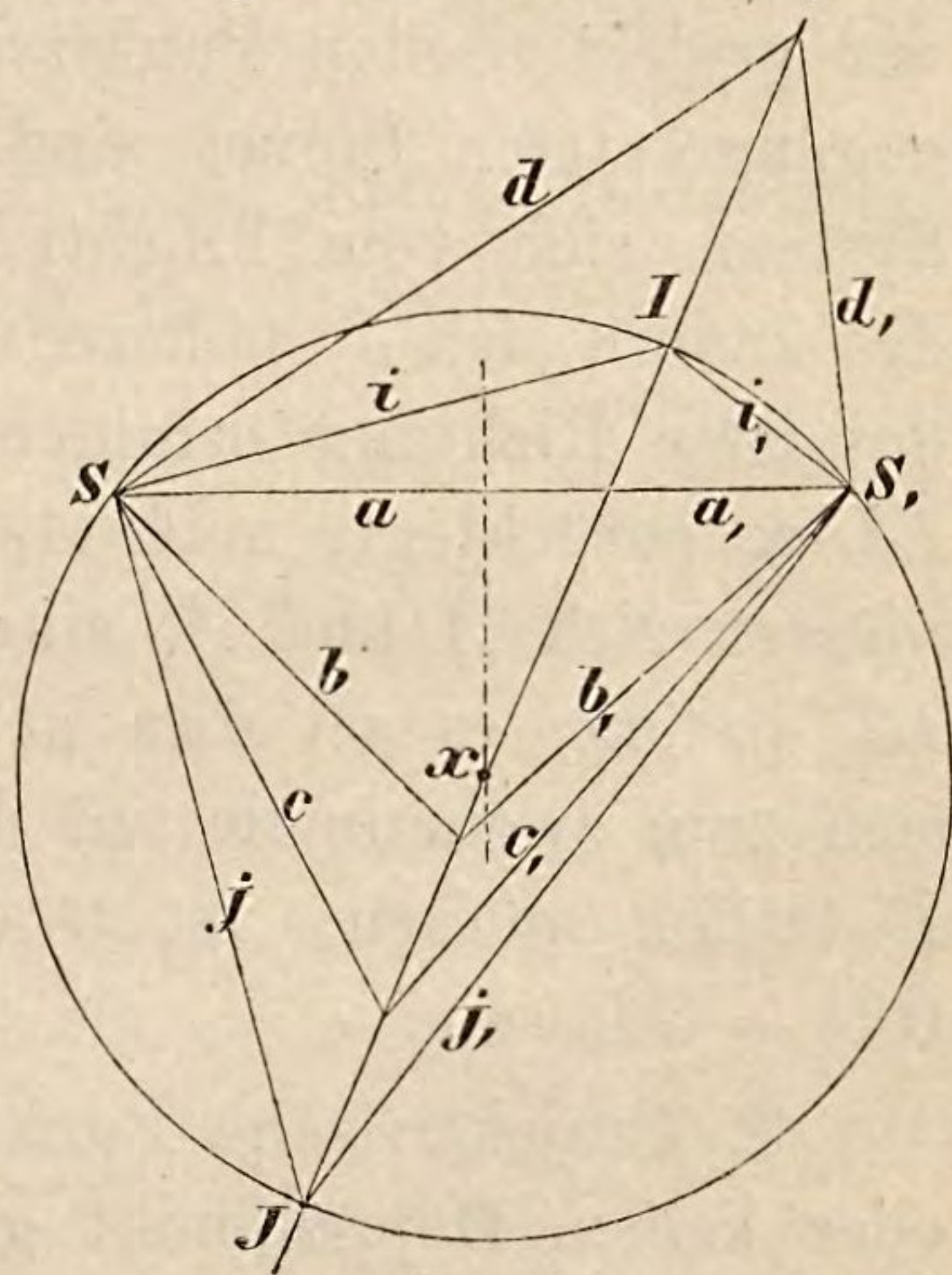


Fig. 19.

$$(abij) = \frac{\sin(ai)}{\sin(ib)} : \frac{\sin(aj)}{\sin(jb)};$$

da $\sphericalangle(ij) = \sphericalangle(i_1j_1) = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}(ai) \cdot \operatorname{tg}(a_1j_1) = \operatorname{tg}(bi) \cdot \operatorname{tg}(b_1j_1) = \text{konst.}$$

§ 5. Systeme von gemeinsamem Träger. Involutrische Systeme.

1. *Erklärungen.* Liegen in zwei projektivischen Punktreihen von gemeinsamem Träger je zwei homologe Punkte auf verschiedenen Seiten von ihren Fluchtpunkten, d. h. ist die Potenz negativ, so sind die Reihen gleichen Sinnes (oder gleichlaufend), im anderen Falle entgegengesetzten Sinnes (entgegengesetzt laufend). Fallen zwei homologe Punkte in einander, so entsteht ein Doppelpunkt. Der Halbierungspunkt der von den Fluchtpunkten begrenzten Strecke ist der Mittelpunkt des Systems.

2. *Lehrsatz.* Projektivische Punktreihen entgegengesetzten Sinnes auf gemeinsamem Träger haben stets zwei Doppelpunkte, welche außerhalb der von den Fluchtpunkten eingeschlossenen Strecke symmetrisch zum Mittelpunkt liegen.

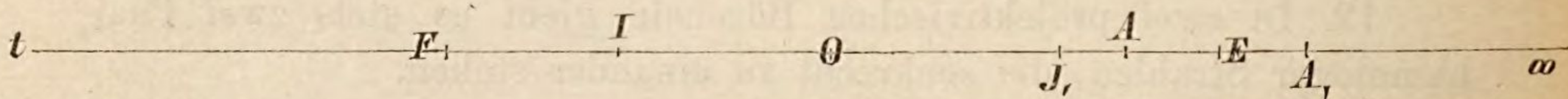


Fig. 20.

Beweis. Es seien (Fig. 20) I und J_1 die beiden Fluchtpunkte der projektivischen Punktreihen auf dem Träger t ; da die Reihen entgegengesetzten Sinnes sind, so muß, wenn der Punkt A des einen Systems sich vom Fluchtpunkte I entfernt, der homologe Punkt A_1 des andern sich J_1 nähern und zwar muß die Bewegung in entgegengesetzter Richtung erfolgen; während daher der Punkt A den Weg $IJ_1 \infty$ zurücklegt, muß A_1 die Strecke ∞J_1 zurücklegen, und daher müssen sich A und A_1 einmal auf diesem Wege und zwar außerhalb IJ_1 treffen; es sei dies in E . Ebenso ersieht man sofort, daß sie sich zum zweitenmale auf der anderen Seite von IJ_1 in einem Punkte F treffen müssen. Ist O der Mittelpunkt, so muß hierbei offenbar $OF = OE$ sein.

3. Projektivische Punktreihen gleichen Sinnes haben zwei, einen oder keinen Doppelpunkt gemeinsam; in dem ersten Falle liegen die Doppelpunkte innerhalb der von den Fluchtpunkten eingeschlossenen Strecke symmetrisch zum Mittelpunkte, im zweiten liegt der Doppelpunkt auf dem Mittelpunkte.

Beweis. Da die Reihen gleichen Sinnes sein sollen, so müssen je zwei homologe Punkte (Fig. 21) A und A_1 auf umgekehrten Seiten der

Fluchtpunkte liegen; es können daher Doppelpunkte nur zwischen I und J_1 auftreten; giebt es einen, nicht im Mittelpunkte gelegenen

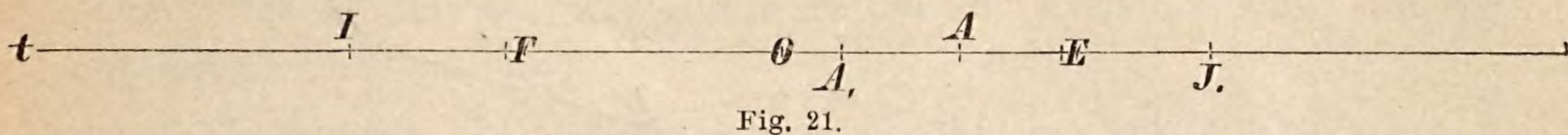


Fig. 21.

Doppelpunkt, so ist dessen symmetrischer Punkt offenbar auch ein Doppelpunkt.

4. Das Quadrat über dem halben Abstände der beiden Doppelpunkte ist gleich der Summe der Quadrate des halben Abstandes der beiden Fluchtpunkte und der Potenz. Ist die Potenz negativ, so giebt es zwei, einen oder keinen Doppelpunkt, je nachdem der halbe Abstand der beiden Fluchtpunkte größer, gleich oder kleiner als die Quadratwurzel aus der (absolut genommenen) Potenz ist.

Beweis. O sei der Mittelpunkt, I und J_1 seien die Fluchtpunkte, E und F die Doppelpunkte zweier projektivischer Punktreihen auf dem Träger t , die Potenz sei $\pm q^2$, so ist bei positiver Potenz:

$$FI \cdot FJ_1 = q^2$$

oder, da

$$AO \cdot A_1O - IO \cdot AA_1 = q^2 + IO^2,$$

$$FO^2 = EO^2 = q^2 + IO^2.$$

Bei negativer Potenz erhält man in gleicher Weise:

$$FO^2 = IO^2 - q^2;$$

daher ist FO reell und es giebt zwei Werte für FO , wenn $IO > q$ ist, u. s. f.

5. Ähnliche Punktreihen haben stets einen reellen Doppelpunkt im Endlichen; der zweite Doppelpunkt liegt im Unendlichen.

6. *Aufgabe.* Die Doppelpunkte zweier projektivischer Punktreihen von gemeinsamem Träger zu finden.

a) *Erster Fall.* Die beiden Fluchtpunkte und ein Paar homologer Punkte sind gegeben.

Konstruktion 1: Es seien I und J_1 die Fluchtpunkte, O der Mittelpunkt, AA_1 ein Paar homologer Punkte, so verwandele man das Rechteck $AI \cdot A_1J_1$ in ein Quadrat, dessen Seite q sei, so ist — unter F den einen gesuchten Doppelpunkt verstanden — zu konstruieren $FO^2 = \pm q^2 + IO^2$, je nachdem q^2 positiv oder negativ ist.

Konstruktion 2: Man konstruiere (Fig. 22) über IJ_1 einen Halbkreis, errichte in den Endpunkten Perpendikel und zwar nach derselben Seite, wenn die Potenz negativ, nach entgegengesetzten Seiten, wenn die Potenz positiv ist; die Länge der Perpendikel mache man

die Peripherie — es sei in E und Φ — schneidet, ziehe die Strahlen SE und $S\Phi$, so schneiden diese den Träger der beiden projektivischen Punktreihen in den Doppelpunkten E und F . (Beweis wird erst bei den Kegelschnitten klar.)

7. *Erklärung.* Bei Büscheln unterscheiden wir solche gleichen und entgegengesetzten Sinnes (Drehung), je nachdem man durch gleichartige oder umgekehrte Drehung eines homologen Strahlenpaares die anderen erhält. Doppelstrahlen sind solche, die in projektivischen Büscheln von gemeinsamem Träger sich in beiden Systemen entsprechen. Bei Verschiebung eines Büschels parallel zu sich selbst gehen die Doppelstrahlen in parallele Strahlen über.

8. *Lehrsatz.* Doppelstrahlen projektivischer Büschel von gemeinsamem Träger schneiden die Transversalen in Doppelpunkten, und umgekehrt.

9. *Erklärung.* Entspricht in projektivischen $\left\{ \begin{array}{c} \text{Reihen} \\ \text{Büscheln} \end{array} \right\}$ von gemeinsamem Träger je ein $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkt} \\ \text{Strahl} \end{array} \right\}$ demselben zweiten $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkte} \\ \text{Strahle} \end{array} \right\}$, mag man ihn als $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punkt} \\ \text{Strahl} \end{array} \right\}$ des ersten oder des zweiten Systems auffassen, so bilden die $\left\{ \begin{array}{c} \text{Reihen} \\ \text{Büschel} \end{array} \right\}$ ein involutorisches $\left\{ \begin{array}{c} \text{Punktsystem} \\ \text{Strahlensystem} \end{array} \right\}$ oder eine Involution.

10. *Lehrsatz.* Projiziert man eine Punktreihe auf einen zweiten Träger von irgend einem Punkte der Symmetrieaxe der beiden Träger aus, und dreht das eine System über die Symmetrieaxe um den Schnittpunkt der Träger, bis die beiden letztern zusammenfallen, so erhält man eine ungleichstimmige Involution.

11. Sind zwei Paare homologer Punkte zweier projektivischer Punktreihen auf gemeinsamem Träger involutorisch, so sind alle Punktpaare involutorisch.

Beweis. Es sei $ABCD \dots \overline{\wedge} A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$ und gleichzeitig seien A, B und A_1, B_1 involutorisch, d. h. es mögen A und B_1 in einen Punkt, A_1 und B ebenfalls in einen Punkt zusammenfallen; es ist alsdann, wenn man einen Punkt $C_1 D$ annimmt,

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1),$$

$$(ABCD) = (B A C_1 D_1),$$

oder es fallen gleichzeitig C in D_1 und C_1 in D , d. h. CD und $C_1 D_1$ sind ebenfalls involutorisch.

12. Man kann stets durch Projektion einer Punktreihe von zwei Centren aus auf einem zweiten Träger eine ungleichstimmige Involution erzeugen.

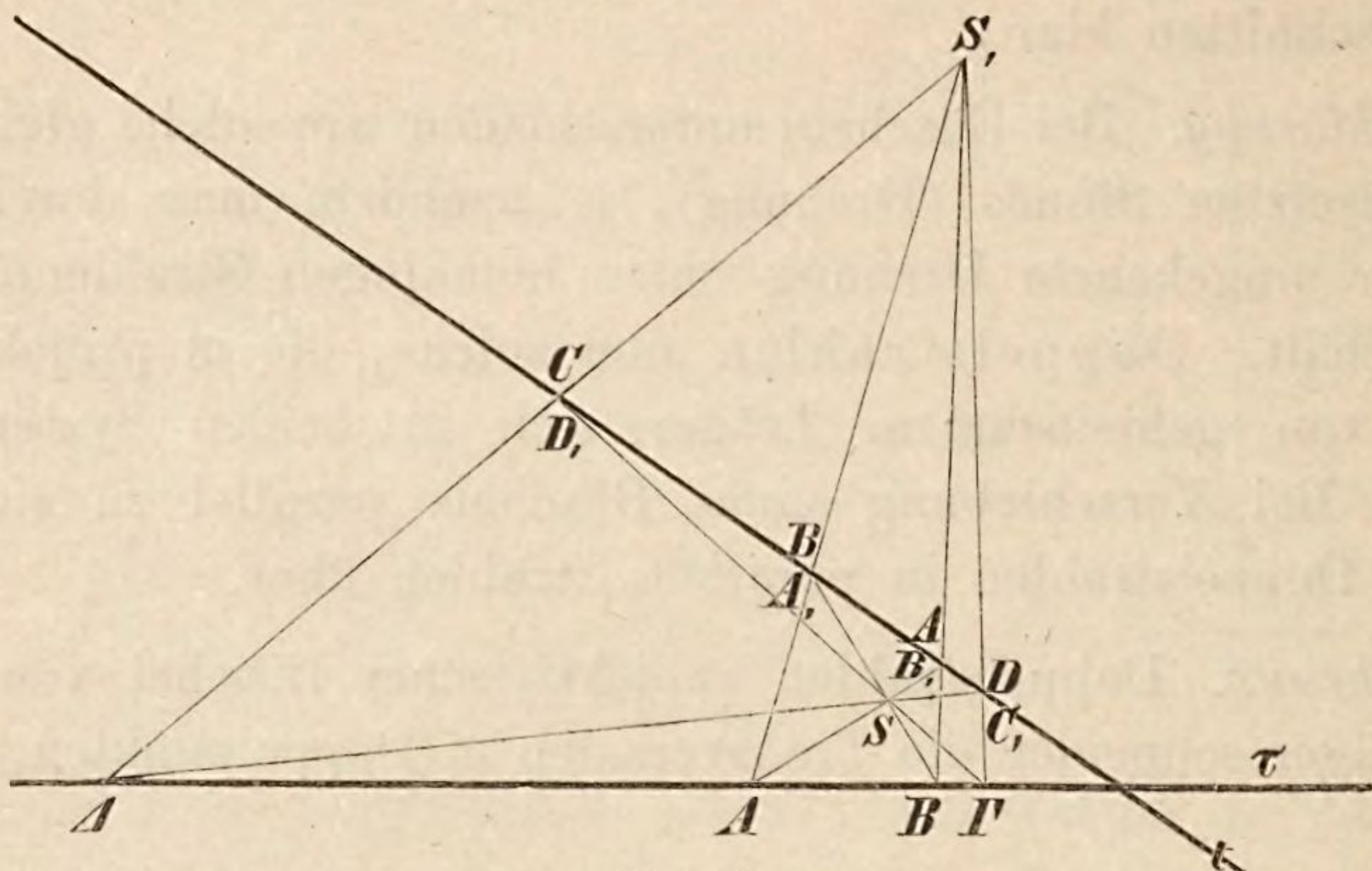


Fig. 24.

Beweis. Auf dem Träger τ (Fig. 24) sei die Punktreihe $A, B, C, D, \dots$ und ferner sei ein beliebiger Punkt S gegeben, von welchem aus man die Punktreihe auf einen Träger t projiziert; man erhalte auf diese Weise die Punktreihe $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$. Verbindet man nun B mit A_1 und A mit B_1 , verlängert man diese Verbindungslinien bis zum Schnitte S_1 und projiziert nunmehr von S_1 die gegebene Punktreihe auf t , so ist die entstehende neue Reihe $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots \wedge A, B, C, D, \dots$, und da beide Punktpaare AA_1, BB_1 involutorisch sind, so bilden die Reihen eine Involution und zwar, wie man sofort ersieht, eine ungleichstimmige.

13. Die beiden projektivischen Reihen einer ungleichstimmigen Involution liegen zu einer und derselben dritten Reihe perspektivisch.

14. In einer ungleichstimmigen Involution fallen die beiden Fluchtpunkte in einen Punkt (Mittelpunkt) zusammen und es giebt stets zwei reelle Doppelpunkte.

15. Je zwei entsprechende Punkte einer ungleichstimmigen Involution werden durch die Doppelpunkte harmonisch getrennt.

Beweis. Es seien A und A_1 zwei entsprechende Punkte einer ungleichstimmigen Involution, deren Mittelpunkt I und deren Doppelpunkte E und F seien, so ist:

$$AI \cdot A_1I = FI^2 = EI^2,$$

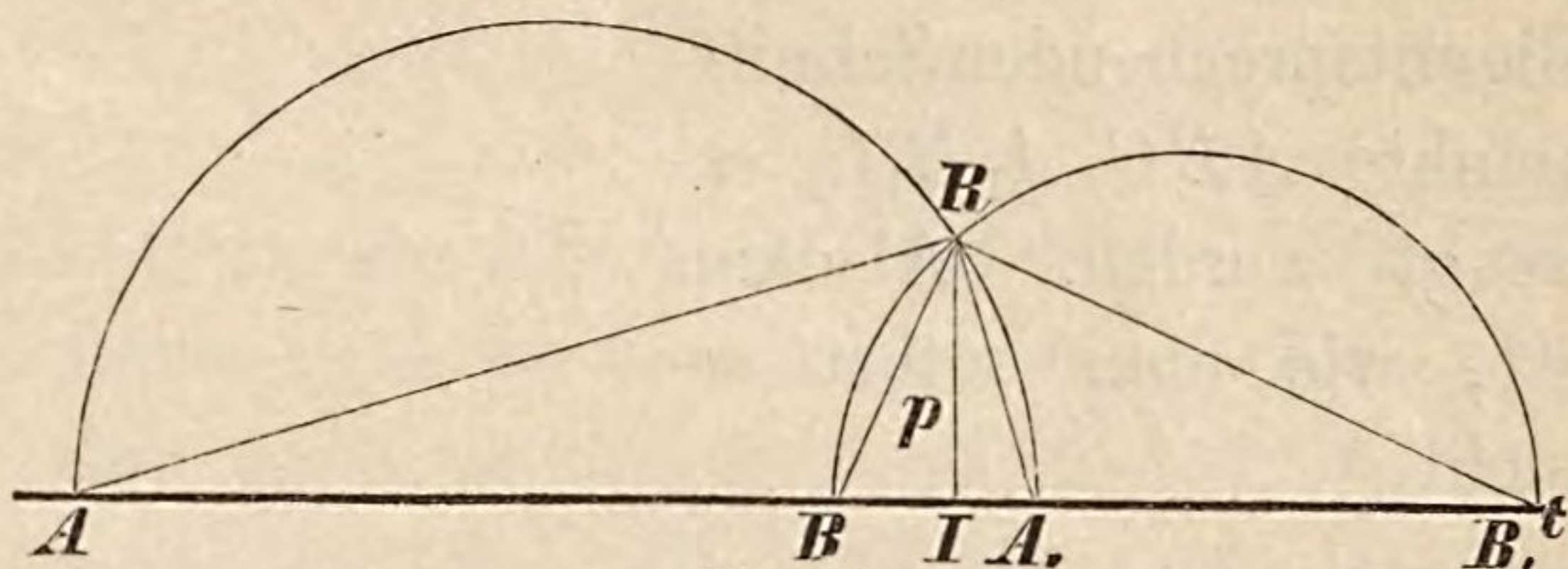
daher

$$(EFAA_1) = -1.$$

16. Dreht man die Schenkel eines rechten Winkels um dessen Scheitel, so bilden die Schnittpunkte der Schenkel mit einer Geraden eine Involution, und diese letztere ist gleichstimmig.

Beweis (Fig. 25). Erzeugen die Schenkel eines rechten Winkels R auf einem Träger t die Schnittpunkte A und A_1 und dreht man den Winkel um seinen Scheitel so, daß der erste Schenkel, welcher A erzeugt, nunmehr durch A_1 geht, so erzeugt der zweite Schenkel A u. s. f.

17. In einer gleichstimmigen Involution fallen die Fluchtpunkte in einen Punkt (Mittelpunkt) zusammen und es gibt keinen reellen Doppelpunkt.



18. Alle Halbkreise über je zwei entsprechenden Punkten einer gleichstimmigen Involution gehen durch einen Punkt.

Beweis. Es seien (s. Fig. 25) AA_1 , BB_1 zwei Paare entsprechender Punkte einer gleichstimmigen Involution, deren Mittelpunkt I ist; alsdann ist

$$AI \cdot A_1I = BI \cdot B_1I = p^2 \text{ (als Potenz);}$$

errichtet man daher in I ein Perpendikel von der Länge p , so müssen die Halbkreise über AA_1 , BB_1 u. s. f. durch den Endpunkt R des Perpendikels gehen.

19. Bei einer gleichstimmigen Involution giebt es stets zwei (zu dem Träger symmetrisch gelegene) Punkte, von denen aus alle von entsprechenden Punkten begrenzten Strecken der Involution unter rechten Winkeln erscheinen.

20. Bei $\left\{ \begin{array}{l} \text{ungleichstimmigen} \\ \text{gleichstimmigen} \end{array} \right\}$ Involutionen liegen je zwei entsprechende Punkte auf $\left\{ \begin{array}{l} \text{derselben Seite} \\ \text{verschiedenen Seiten} \end{array} \right\}$ des Mittelpunktes und die von solchen Punkten begrenzten Abschnitte $\left\{ \begin{array}{l} \text{liegen ganz in- oder} \\ \text{trennen sich gegen-} \end{array} \right\}$ auseinanderseitig $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{liegen ganz in- oder} \\ \text{trennen sich gegen-} \end{array}} \right\}$.

21. Die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks erzeugen auf jeder Transversale eine Involution.

(Die Verbindungslinien der sechs Ecken eines vollständigen Vierecks mit einem Punkte bilden ein involutorisches Büschel.)

Beweis. Je zwei gegenüber liegende Seiten des vollständigen Vierecks (Fig. 26) seien aa_1 , bb_1 und cc_1 . Durch die Ecke S mögen

abc und durch S_1 die Seiten a_1b_1c gehen, und auf einer Transversale mögen die entsprechenden Schnittpunkte $ABC A_1B_1C_1$ erzeugt werden. Alsdann ist, wie man sofort ersieht,

$$(a, b, c, SC_1) \\ = (b_1, a_1, c, S_1C_1)$$

$$(ABCC_1) \\ = (B_1A_1CC_1)$$

d. h. die Punkte sind involutorisch.

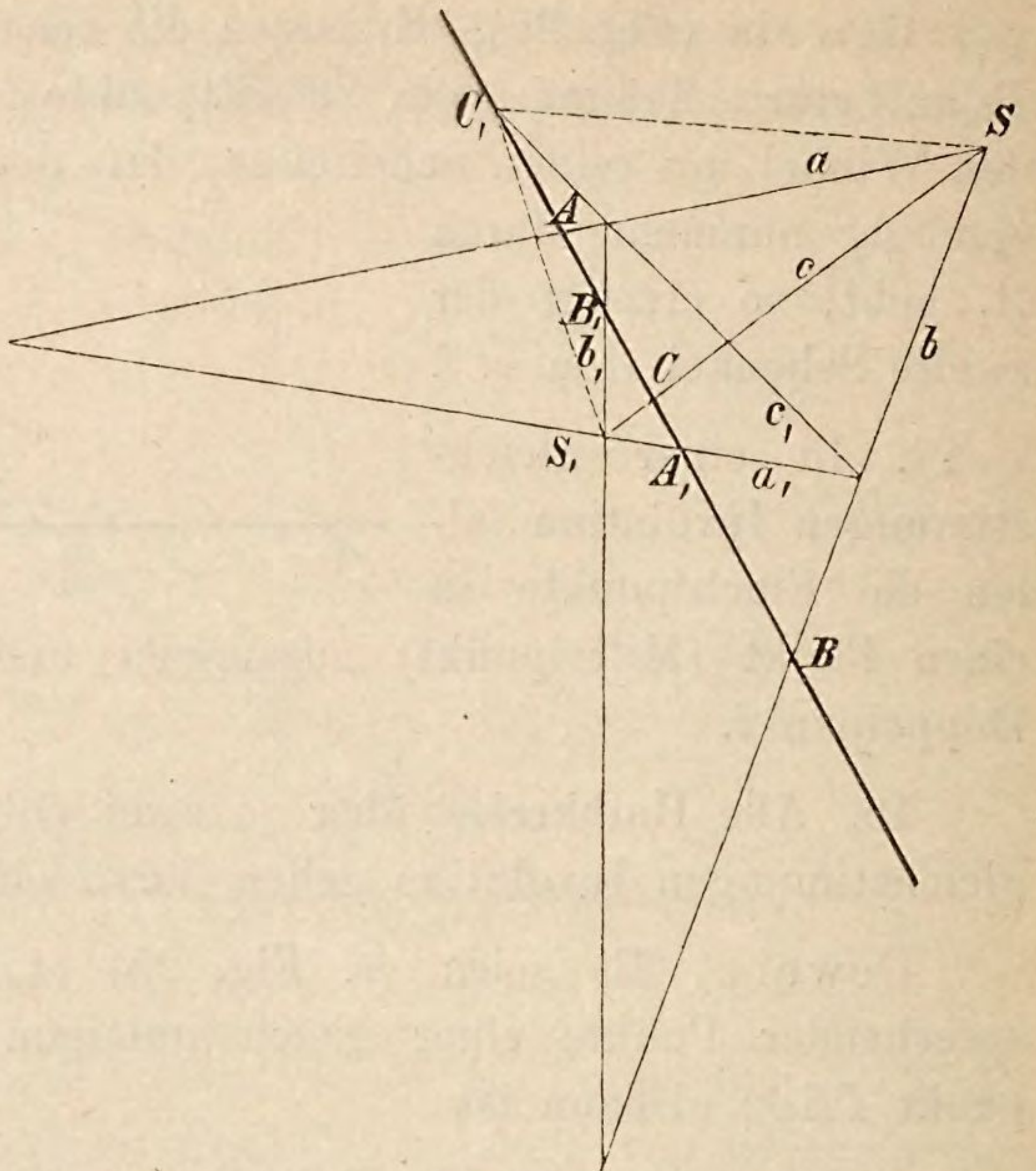


Fig. 26.

§ 6. Der Kreis.

1. *Lehrsatz.* Nimmt man auf der Kreisperipherie zwei beliebige Punkte als Träger zweier Büschel an, deren homologe Strahlen sich auf der Peripherie schneiden, so entstehen kongruente Büschel (gleichen Sinnes); letztere erzeugen auf allen Transversalen, auf deren verschiedenen Seiten die Träger liegen, projektivische Punktreihen entgegengesetzten Sinnes, auf allen Transversalen, auf deren einer Seite die Träger liegen, projektivische Reihen gleichen Sinnes mit zwei, einem oder keinem Doppelpunkt.

Beweis. Zieht man durch zwei beliebige Punkte (Fig. 27) S und S_1 einer Kreisperipherie die Büschel $abcd$ und bezügl. $a_1b_1c_1d_1$, deren homologe Strahlen a und a_1 u. s. f. sich in Punkten $A'B'C'D'$ der Kreislinie schneiden; wir sehen alsdann sofort, daß

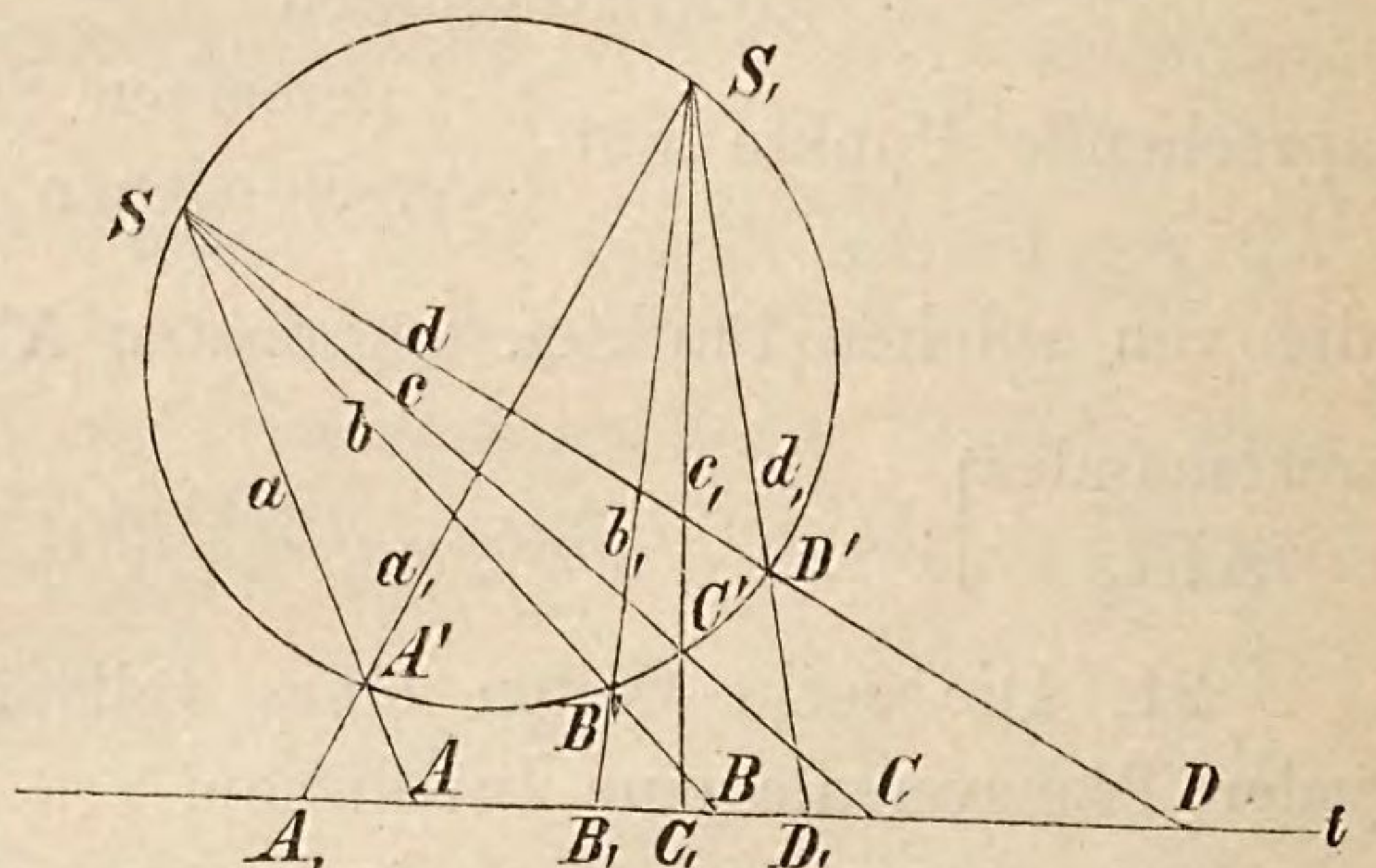


Fig. 27.

$$S \cdot abcd \dots \cong S_1 \cdot a_1b_1c_1d_1 \dots,$$

da $\angle(ab) = \angle(a_1b_1)$ ist. Sogleich ersieht man auch, daß wenn die Schnittpunkte der Strahlen mit einer Transversale $ABCD$ bezügl. $A_1B_1C_1D_1$ sind,

$$ABCD \overline{\wedge} A_1B_1C_1D_1$$

sein muß, u. s. f.

2. Schneiden sich die auf einander folgenden Strahlen zweier Büschel, deren Träger nicht auf der Peripherie eines Kreises liegen, auf Punkten der Peripherie, so sind die Systeme nicht projektivisch.

Beweis. 1. Fall. Die Verbindungslinie der beiden Träger schneide die Kreislinie.

Da die Verbindungslinie der beiden Träger die Peripherie schneidet, so müßten, wenn die beiden Büschel projektivisch wären, dieselben auch perspektivisch liegen, d. h. die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen bildeten eine Gerade; da sie aber auf einem Kreise liegen, so können die Systeme nicht projektivisch sein.

2. Fall. Die Verbindungslinie der beiden Träger schneide die Kreislinie nicht.

Die beiden Träger (Fig. 28) seien S und S_1 , die Strahlen a und a_1 mögen sich im Punkte A , b und b_1 in B der Peripherie schneiden; man verbinde A mit B und verlängere AB bis zum Schnitte mit der Verbindungslinie SS_1 , es sei dies D und SD werde mit d , S_1D mit d_1 bezeichnet, so bestimme man einen Strahl c_1 , so daß

$$(a_1b_1c_1d_1) = -1$$

ist; dieser Strahl c_1 schneide AB in C_1 , die Peripherie des Kreises

in C ; verbindet man dann C mit S , so ist SC nach der Voraussetzung der homologe Strahl zu c_1 , dagegen ist

$$(a_1b_1c_1d_1) \geq (abSCd),$$

d. h. $S \cdot abcd$ nicht $\overline{\wedge} S_1 \cdot a_1b_1c_1d_1$.

3. Zwei kongruente Strahlenbüschel erzeugen durch die Schnittpunkte homologer Strahlen eine Kreislinie, welche durch die Träger der Büschel geht.

4. Alle Tangenten an einen Kreis bilden auf zwei festliegenden Tangenten projektivische Reihen; dreht man die letzteren um ihren Schnitt-

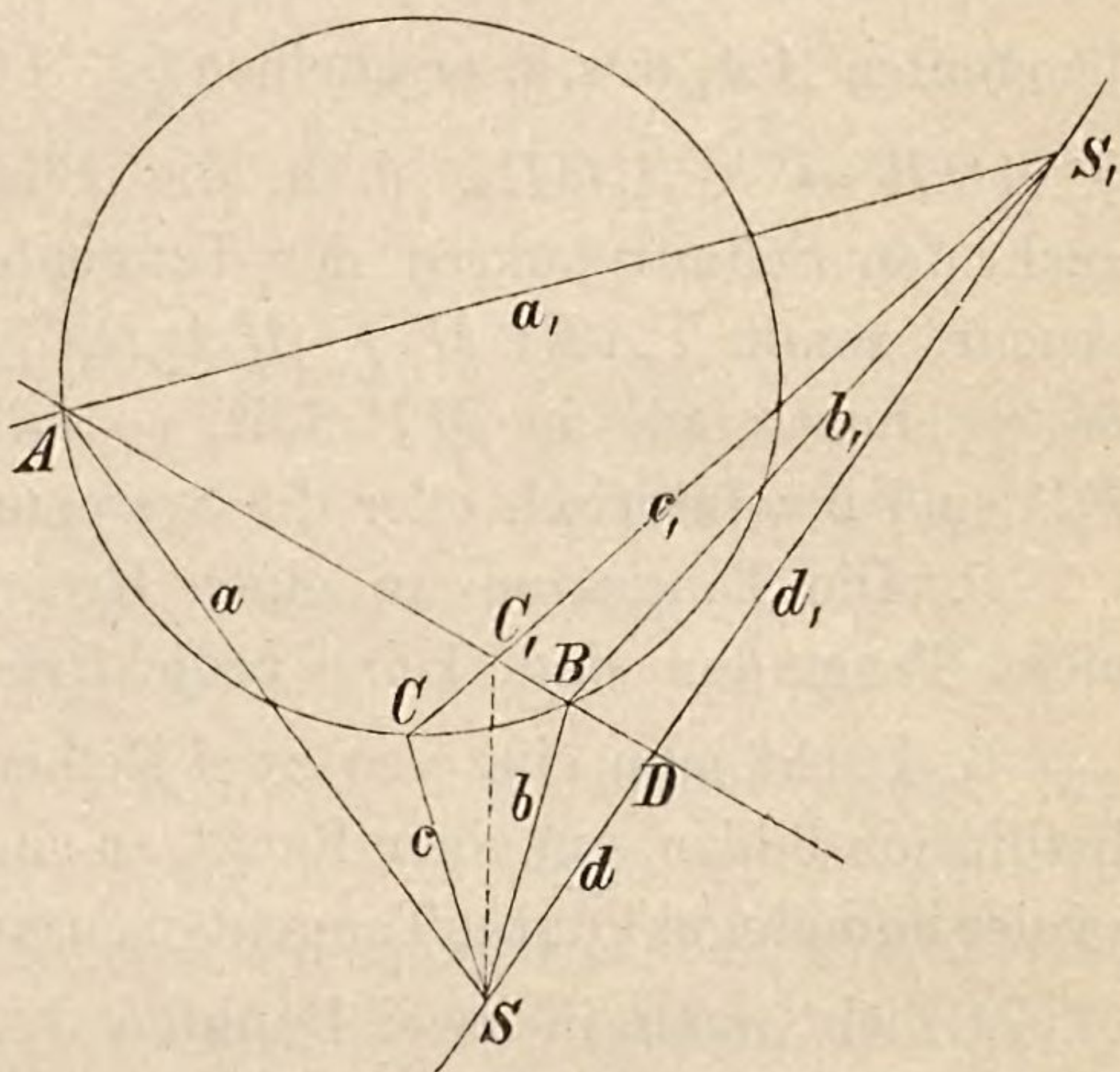


Fig. 28.

punkt bis zum Zusammenfallen, so bilden die beiden Reihen eine ungleichstimmige Involution.

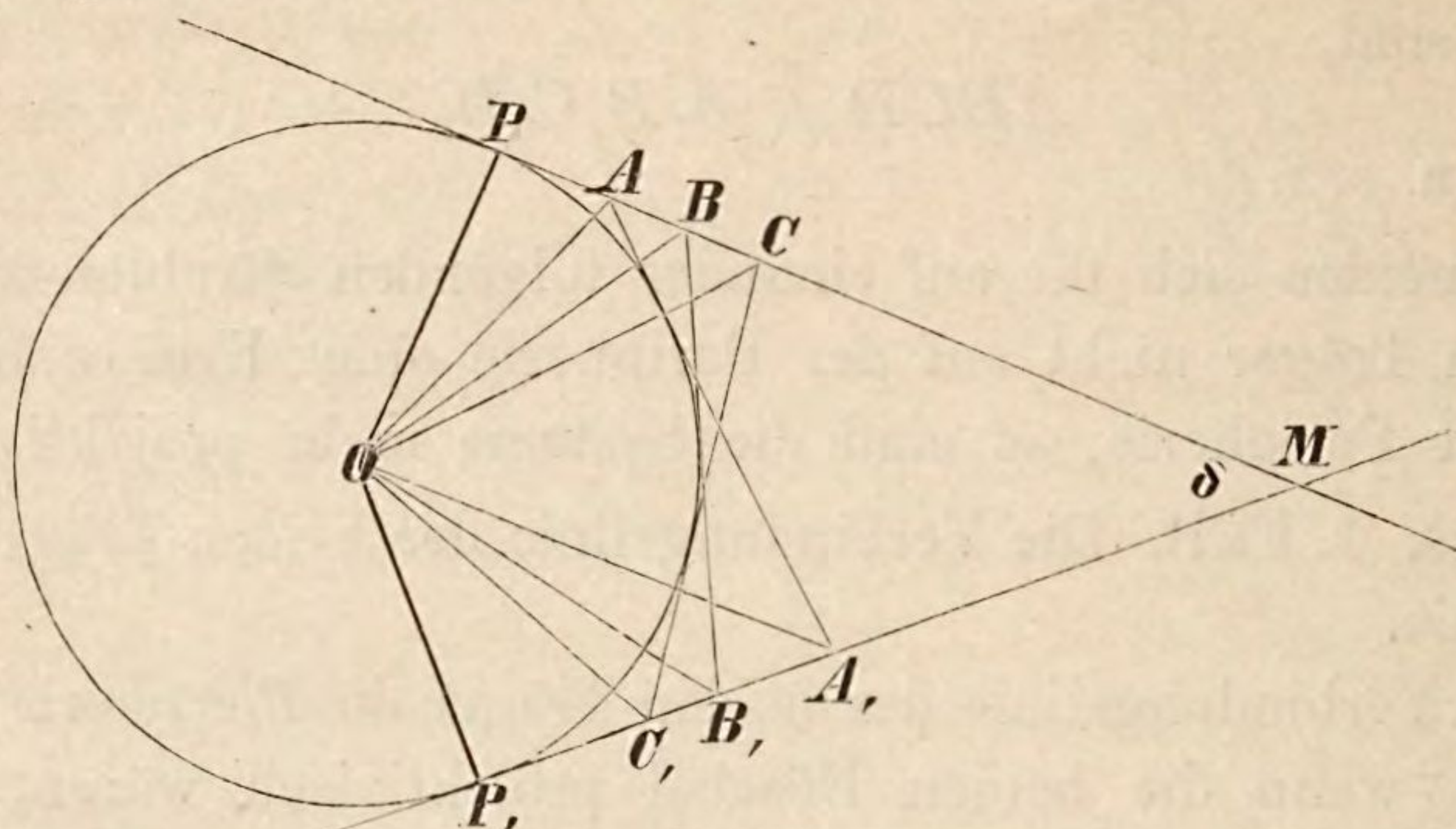


Fig. 29.

Beweis. Es seien (Fig. 29) MP und MP_1 zwei Tangenten an den Kreis um O , die sich unter $\sphericalangle \delta$ schneiden, ferner seien AA_1 , BB_1 u. s. f. Tangenten an den Kreis, welche auf PM und P_1M die Reihen $ABC \dots$ und $A_1B_1C_1 \dots$ erzeugen. Es ist nun der Centriwinkel, unter welchem die Tangenten AA_1 u. s. f. erscheinen ($\sphericalangle AOA_1$) konstant $= \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$, daher $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A_1OB_1$, d. h. die Büschel, welche vom Mittelpunkt nach den Schnittpunkten der Tangenten gezogen werden, sind kongruent, somit $PABCM \overline{\wedge} MA_1B_1C_1P_1$. Dreht man nun MP_1 um M bis die Gerade in MP fällt, so fällt auch P_1 auf P , d. h. M und PP_1 sind involutorisch oder die Systeme bilden alsdann eine Involution.

5. Die Tangenten an einen Kreis bilden auf zwei Geraden, die nicht Tangenten sind, keine projektivischen Reihen.

6. Dreht man eine von zwei Reihen, welche eine ungleichstimmige Involution bilden, um einen Punkt, so sind sämtliche Verbindungslinien je zweier homologer Punkte Tangenten an einen Kreis (sie umhüllen den Kreis).

7. Zieht man in zwei Punkten einer Peripherie Büschel, deren homologe Strahlen sich auf der Kreislinie schneiden, so entspricht der Verbindungslinie der Träger in dem einen Systeme die Tangente an den Kreis im Träger in dem zweiten Systeme.

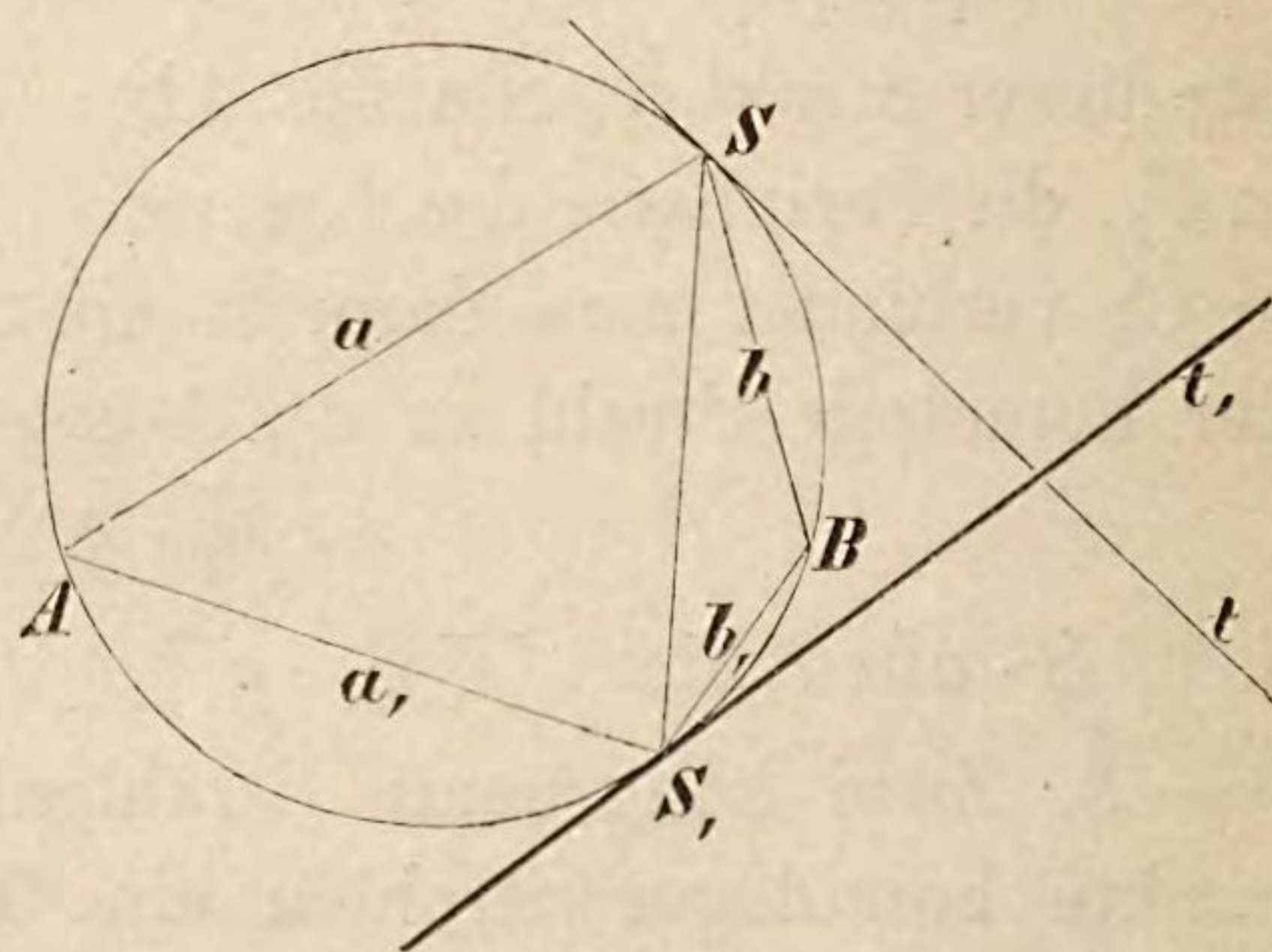


Fig. 30.

Beweis. Es seien (Fig. 30) S und S_1 Punkte der Peripherie und Träger zweier Büschel, welche den Kreis erzeugen; da diese Büschel kongruent sind, so muß der dem Strahle SS_1 des ersten Systems ent-

sprechende Strahl im zweiten System mit einem Strahle a_1 denselben Winkel bilden, den SS_1 mit dem homologen Strahle a bildet, d. h. die Tangente t_1 in S_1 ist homolog zu SS_1 , also ebenso t zu S_1S .

8. Zieht man eine beliebige Transversale durch den Schnittpunkt zweier Kreistangenten, so erzeugen die in den Taktionspunkten als Träger konstruierten Büschel, durch welche der Kreis erzeugt gedacht wird, auf der Transversale eine gleichstimmige Involution.

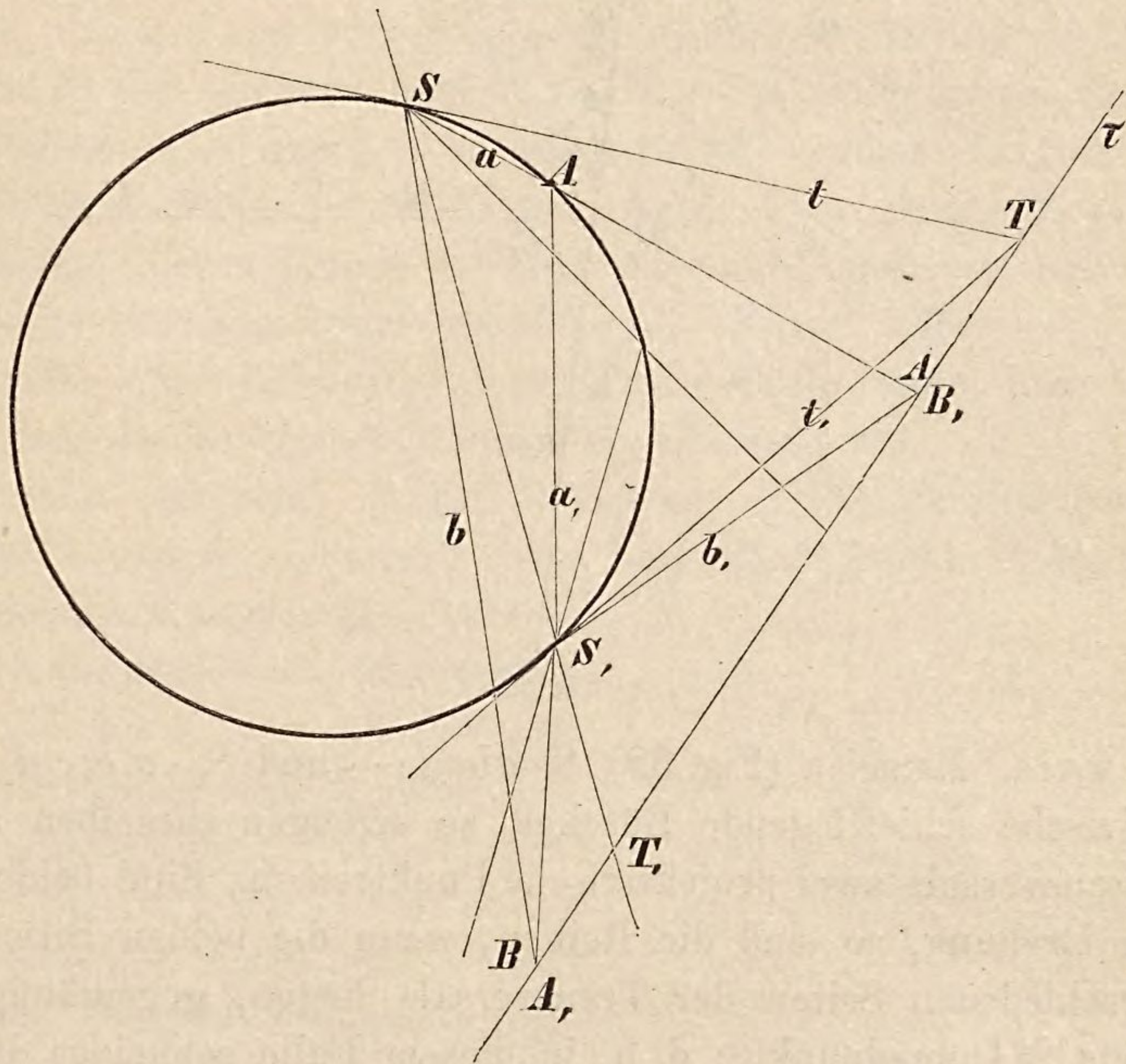


Fig. 31.

Beweis. Es seien (Fig. 31) S und S_1 die Träger zweier kongruenter Büschel, welche einen Kreis erzeugen, t und t_1 seien die Tangenten in den genannten Punkten und mögen sich in T schneiden; zieht man nun durch T eine Transversale τ , so müssen die Büschel auf derselben projektivische Reihen erzeugen. Unter T_1 den Schnittpunkt der Verbindungslinie SS_1 mit τ verstanden, entspricht T_1 als Punkt des zweiten Systems dem Punkt T des ersten und als Punkt des ersten auch demselben Punkte des zweiten. TT_1 sind also involutorisch, d. h. die Punktreihen bilden eine Involution und zwar, wie man sofort ersieht, eine gleichstimmige.

§ 7. Kegelschnitte.

Allgemeine Eigenschaften.

1. *Erklärung.* Eine Kurve zweiter Ordnung ist eine solche, die von Transversalen in zwei Punkten geschnitten wird.

2. *Lehrsatz.* Die Schnittpunkte homologer Strahlen zweier projektivischer Büschel liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung. (Kurven zweiter Ordnung werden durch die Schnitte homologer Strahlen zweier projektivischer Büschel erzeugt.)

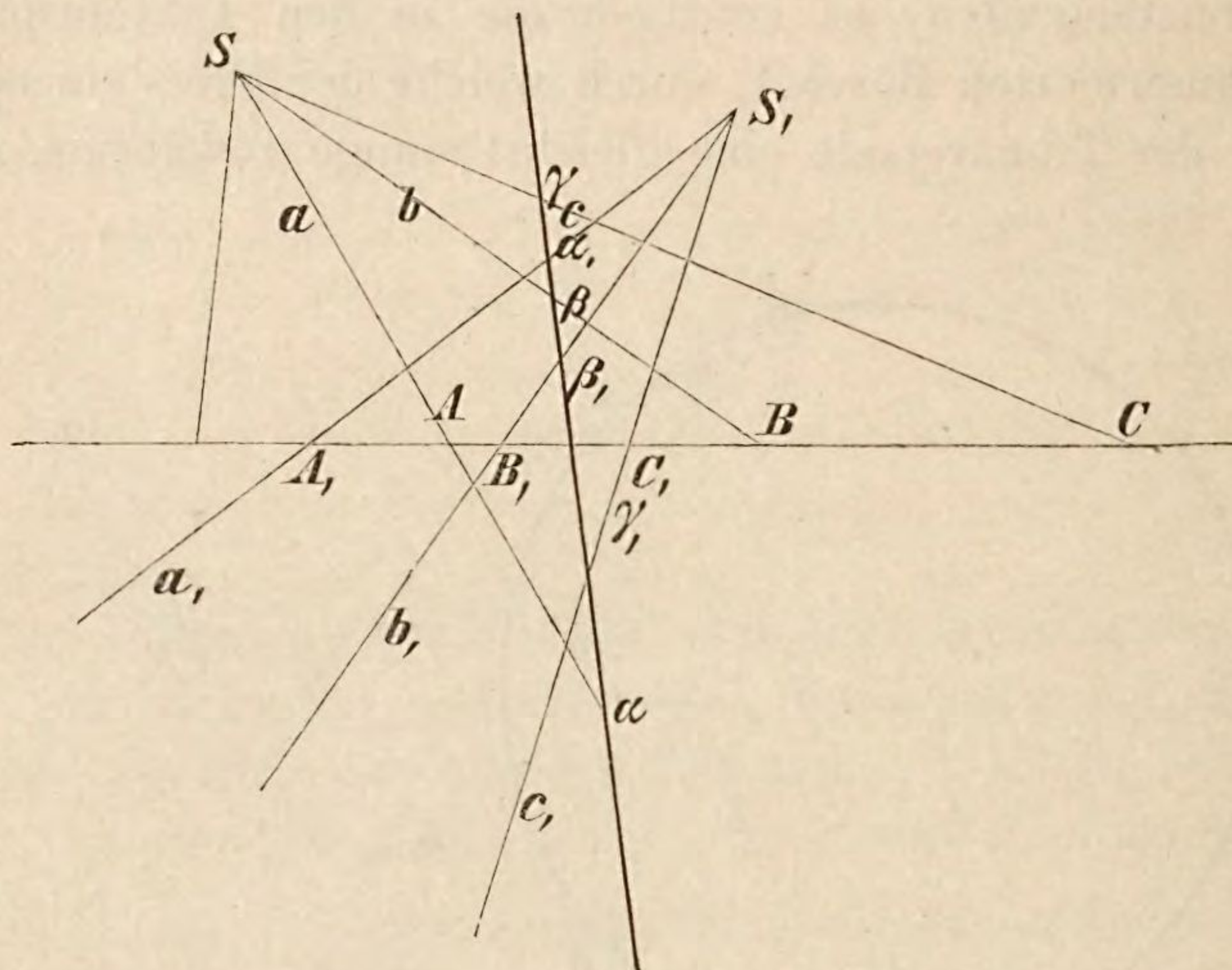


Fig. 32.

Beweis. Es seien (Fig. 32) $S \cdot abcd \dots$ und $S_1 \cdot a_1 b_1 c_1 d_1 \dots$ zwei projektivische schief liegende Büschel, so erzeugen dieselben auf einer jeden Transversale zwei projektivische Punktreihen. Sind beide Büschel gleicher Drehung, so sind die Reihen, wenn die beiden Büschelträger auf verschiedenen Seiten der Transversale liegen, gegenläufig, haben also stets 2 Doppelpunkte; d. h. in diesem Falle schneidet die Transversale stets die Kurve in 2 Punkten; liegen dagegen die beiden Büschelträger auf derselben Seite der Transversale, so sind die Reihen gleichläufig, d. h. sie haben zwei, einen oder keinen Doppelpunkt, die Transversale schneidet oder berührt die Kurve oder hat keinen Punkt mit ihr gemein (liegt ganz außerhalb). Sind die Büschel ungleicher Drehung, so sind die Verhältnisse gerade umgekehrt.

3. Die Träger projektivischer Büschel sind selbst Punkte der von letzteren erzeugten Kurve und der Strahl, welcher in dem einen Systeme der Verbindungslinie der beiden Träger im anderen Systeme entspricht, ist Tangente im Träger und umgekehrt.

Beweis. Es mögen die projektivischen Büschel $S \cdot abcd \dots$ und $S_1 \cdot a_1 b_1 c_1 d_1 \dots$ eine Kurve zweiter Ordnung erzeugen, so muß dem Strahle $s \equiv SS_1$ des ersten Systems ein Strahl s_1 des zweiten Systems entsprechen, und diese beiden homologen Strahlen schneiden sich in S_1 , daher ist S_1 ein Punkt der Kurve (und ebenso auch S). Schneiden

sich a und a_1 in A , so geht jeder dieser Strahlen durch zwei Punkte der Kurve, wie im allgemeinen jede Gerade; s_1 hat aber mit der Kurve nur den einen Punkt S_1 gemein, und zwar ist, wie man sofort ersieht, S_1 ein Doppelpunkt, daher ist s_1 Tangente.

4. In jedem Punkte einer Kurve zweiter Ordnung kann man eine und nur eine Tangente an dieselbe legen.

Beweis. Man nehme den Punkt der Kurve zum Träger des einen Büschels, das mit einem zweiten projektivischen Büschel die Kurve erzeugt, so ist die Tangente homolog zu der Verbindungslinie der Träger.

5. Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung eine Transversale, so erzeugen die projektivischen Büschel, deren Träger die Taktionspunkte sind, und welche durch den Schnitt der homologen Strahlen die Kurve bestimmen, auf der Transversale eine Involution; die Transversale kann man stets so ziehen, daß die Involution keine Doppelpunkte hat.

Beweis. Es seien (Fig. 33) S und S_1 die Taktionspunkte der Tangenten t und t_1 ; zieht man durch den Schnittpunkt M der letzteren eine beliebige Transversale, welche die Verbindungslinie SS_1 in T treffe, so sind M und T , wie man sofort ersieht, involutorische Punkte der von den Büscheln S und S_1 auf MT erzeugten projektivischen Punktreihen und somit bilden letztere eine Involution. Sind die Systeme S und S_1 gleicher Drehung, so hat die Involution für alle Transversalen, welche SS_1 außerhalb der Verbindungsstrecke schneiden, keine Doppelpunkte, ist gleichstimmig.

Sind dagegen S und S_1 entgegengesetzter Drehung, so ist die Involution, wenn der Schnittpunkt T der Transversale mit SS_1 zwischen den beiden letzteren Punkten liegt, gleichstimmig.

6. Zieht man in zwei Punkten einer Kurve zweiter Ordnung Tangenten, so wird jene von letzteren entweder vollständig eingeschlossen, oder sie liegt ganz außerhalb des von den Tangenten eingeschlossenen Raumes.

7. Die projektivischen Büschel erzeugen auf den in den Trägern gezogenen Tangenten gegenseitig projektivische Reihen und der Träger hat zum homologen Punkte der zweiten Reihe den Schnittpunkt der Tangenten.

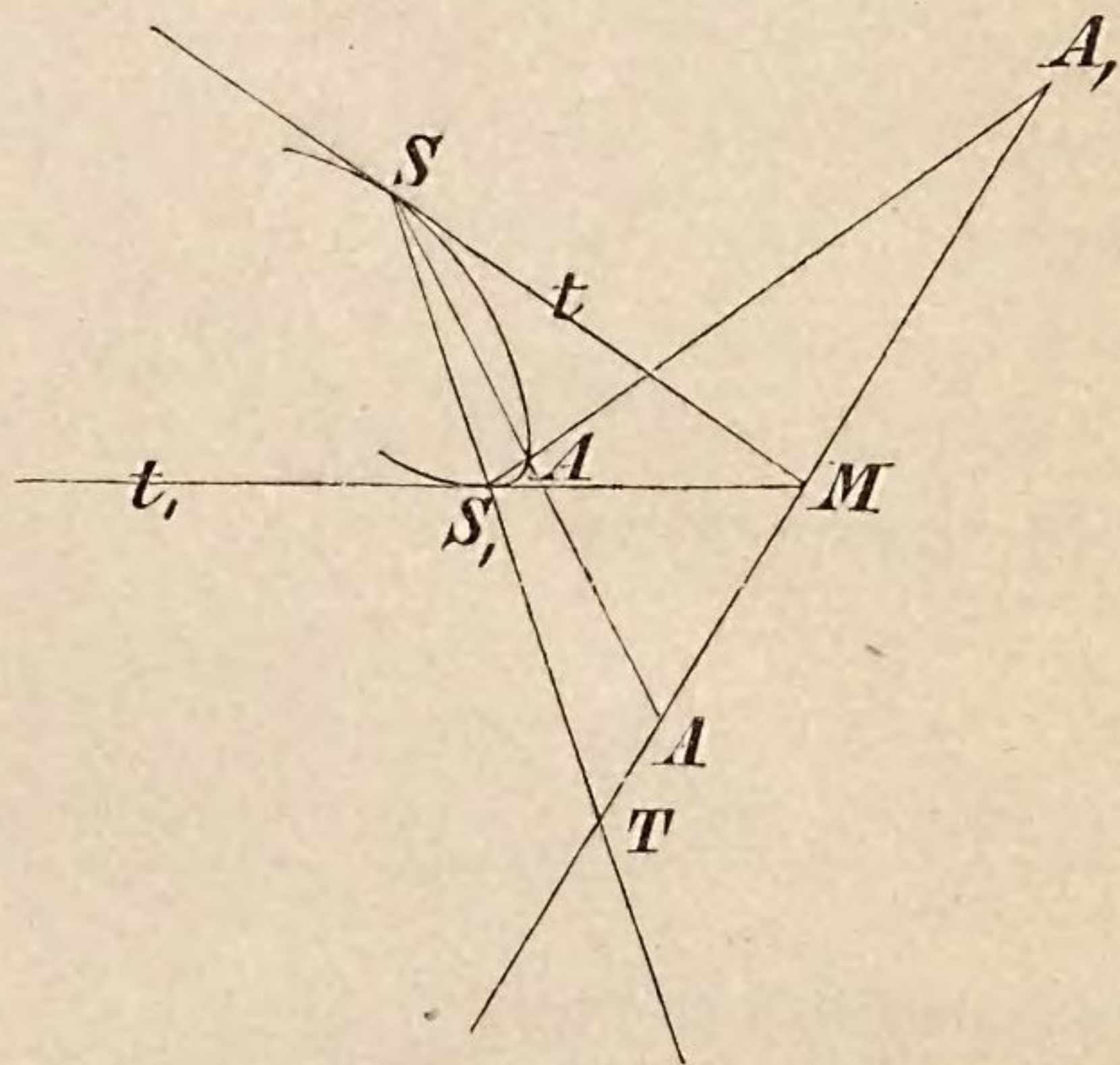


Fig. 33.

volution; dieselbe hat keine Doppelpunkte und man kann sie somit stets entstanden denken durch die Bewegung der Schenkel eines rechten Winkels um den Scheitel, d. h. es giebt in der Ebene stets zwei (in Bezug auf die Transversale symmetrisch gelegene) Punkte, von denen aus die von homologen Punkten begrenzten Strecken der Involution alle unter rechten Winkeln erscheinen; diese Punkte seien P und P_1 . Konstruiert man nun denjenigen Kreis, dessen Fläche zu l senkrecht steht, dessen Mittelpunkt in l liegt und der durch P und P_1 geht, so erscheint von jedem Punkte dieses Kreises aus jedes von homologen Punkten begrenzte Segment der Involution unter einem rechten Winkel. Man nehme nun einen beliebigen Punkt P_2 auf dieser Kreislinie an, so bestimmen P_2 und l eine Ebene E . Zu dieser denke man sich nun eine parallele Ebene E_1 , so schneidet sie die Ebene der gegebenen Kurve in einer Geraden l_1 , welche $\parallel l$ sein muß. Legt man durch P_2 und zwei homologe Strahlen a und a_1 der Büschel S und S_1 — sie mögen auf l die Punkte A und A_1 , auf l_1 aber A' und A'_1 erzeugen — Ebenen, so erhält man in E_1 die Projektionen a' und a'_1 der Strahlen und in ihnen S' und S'_1 als die Projektionen von S und S_1 . Da nun $a' \parallel P_2 A$, $a'_1 \parallel P_2 A_1$ (wegen $E_1 \parallel E$), so stehen also die homologen durch S' und S'_1 gehenden Strahlen, die projektivischen Büscheln angehören, auf einander senkrecht oder ihre Schnittpunkte, die Projektionen der Schnittpunkte homologer Strahlen der Büschel S und S_1 , bilden einen Kreis, d. h. die Kurve zweiter Ordnung kann als Projektion des Kreises aufgefaßt werden.

10. Die Kurven zweiter Ordnung sind Kegelschnitte.

11. Es giebt drei Arten von Kegelschnitten, je nachdem dieselben keinen, einen oder zwei Punkte im Unendlichen haben.

Beweis. Jeder Kegelschnitt ist das perspektivische Bild eines Kreises; der Kreis sei K und liege in der Ebene E , er werde von einem Punkte P aus, den wir zur Vereinfachung der Figuren und der Anschauung in der durch den Mittelpunkt gehenden und senkrecht zur Axe AA_1 stehenden Ebene annehmen wollen, auf eine zweite Ebene E_1 projiziert, welche E in der Axe AA_1 schneide. Eine durch $P \perp AA_1$ und zu E parallel gezogene Gerade schneide E_1 in O , eine durch P zu E_1 parallel gezogene Ebene schneide E in der Geraden l ($\parallel AA_1$); alsdann sind drei Fälle möglich: 1) l hat mit dem Kreis keinen Punkt gemein; 2) l berührt den Kreis und 3) l schneidet den Kreis.

1. Fall. l habe mit dem Kreis (Fig. 35) keinen Punkt gemein; denken wir uns alsdann um K ein Quadrat umschrieben, dessen Seiten $t_1 t_2$ und $t_3 t_4$ parallel AA_1 , und dessen beide andere Seiten senkrecht zu AA_1 sind; letztere mögen AA_1 in M und N treffen. Die Projektionen der

vier Seiten des Quadrats bilden ein Viereck $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$, in welchem $\tau_1\tau_2 \parallel \tau_3\tau_4$ ist, $\tau_1\tau_3$ durch M , $\tau_2\tau_4$ durch N und beide durch O gehen; das

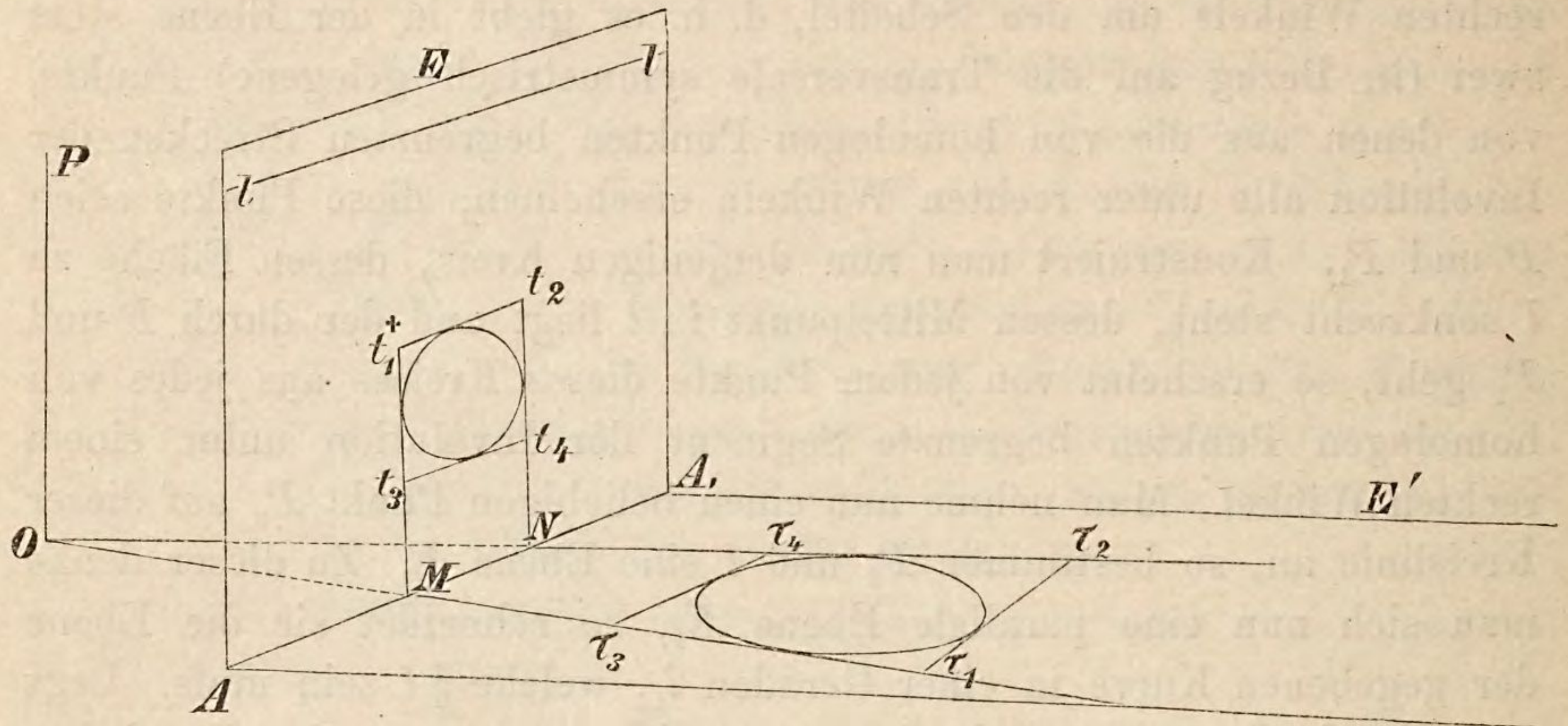


Fig. 35.

Viereck $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ umhüllt den Kegelschnitt vollständig, letzterer ist also eine geschlossene Kurve, die keinen Punkt im Unendlichen hat, es ist eine Ellipse.

2. Fall. l (Fig. 36) berühre den Kreis K , dann fällt es mit der Seite t_1t_2 des umschriebenen Quadrats $t_1t_2t_3t_4$ zusammen; daher fällt

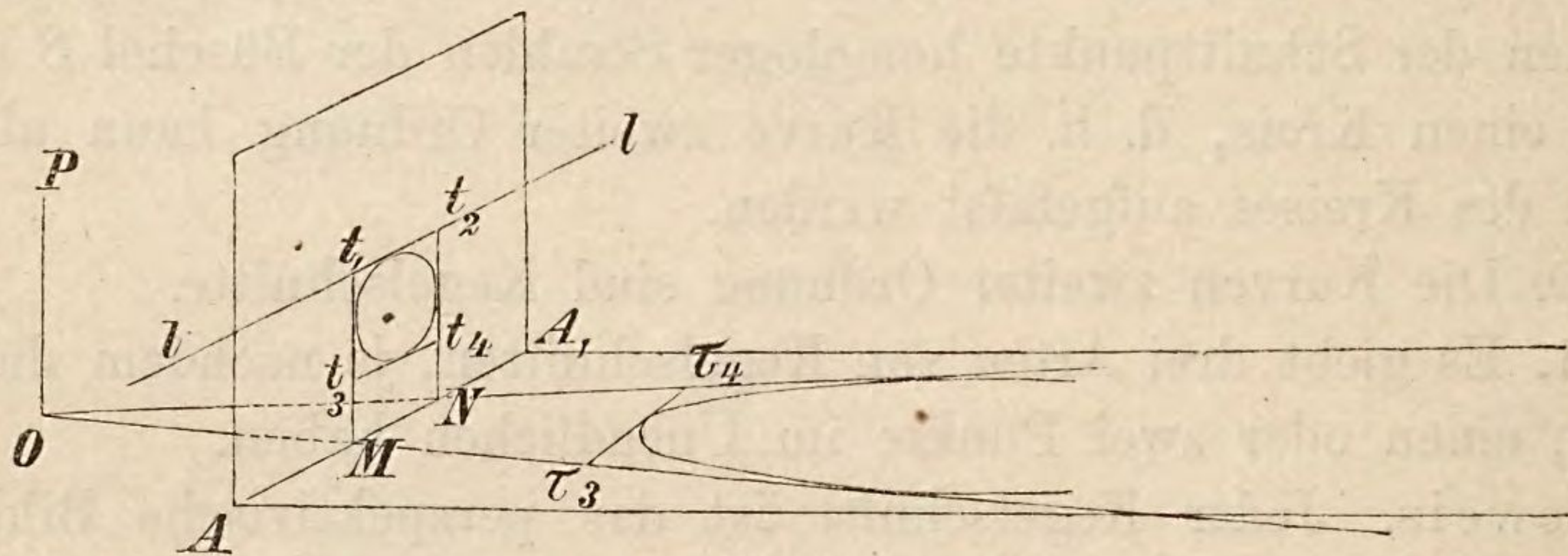


Fig. 36.

die Projektion $\tau_1\tau_2$ von t_1t_2 und damit der Berührungspunkt der Kurve mit $\tau_1\tau_2$ ins Unendliche; die Projektionen von t_1t_3 und t_2t_4 schneiden sich in O , während $\tau_3\tau_4 \parallel AA_1$ bleibt; die Kurve ist von den Projektionen der 3 Seiten t_1t_3 , t_3t_4 , t_4t_2 eingeschlossen und hat einen Punkt im Unendlichen; es ist eine Parabel.

3. Fall. l (Fig. 37) schneide den Kreis K in zwei Punkten, U und V . Man ziehe in diesen beiden Punkten U und V die Tangenten an den Kreis, sie schneiden AA_1 in den Punkten Q und R und schneiden sich gegenseitig in Z , so schneiden sich die Projektionen U_1Q und V_1R von UQ und VR in der Projektion Z_1 von Z , die Projektionen U_1 und V_1 der Berührungspunkte U und V rücken ins Unendliche; die Kurve hat zwei Äste, die ganz außerhalb der Tangenten $\tau_1\tau_2$ und

$\tau_3 \tau_4$ liegen, und deren einer Ast von $O\tau_3$ und $O\tau_4$ berührt werden; die Kurve ist eine Hyperbel.

12. Die Hyperbel hat zwei Asymptoten, d. h. zwei Gerade berühren sie im Unendlichen.

Beweis. In Fig. 37 sind $Z_1 U_1$ und $Z_1 V_1$ die Asymptoten.

13. Liegt das Projektionscentrum in der Ebene des Kreises, so degeneriert die Ellipse in eine Strecke, die Parabel in eine Gerade oder in einen Halbstrahl, die Hyperbel in eine Gerade (eigentlich in zwei zusammenfallende Gerade); liegt das Projektionscentrum in der Projektionsebene, so degeneriert die Ellipse in einen Punkt, die Parabel in eine Gerade, die Hyperbel in zwei sich schneidende Gerade.

14. Die Ellipse kann im besonderen in einen Kreis, die Hyperbel in eine

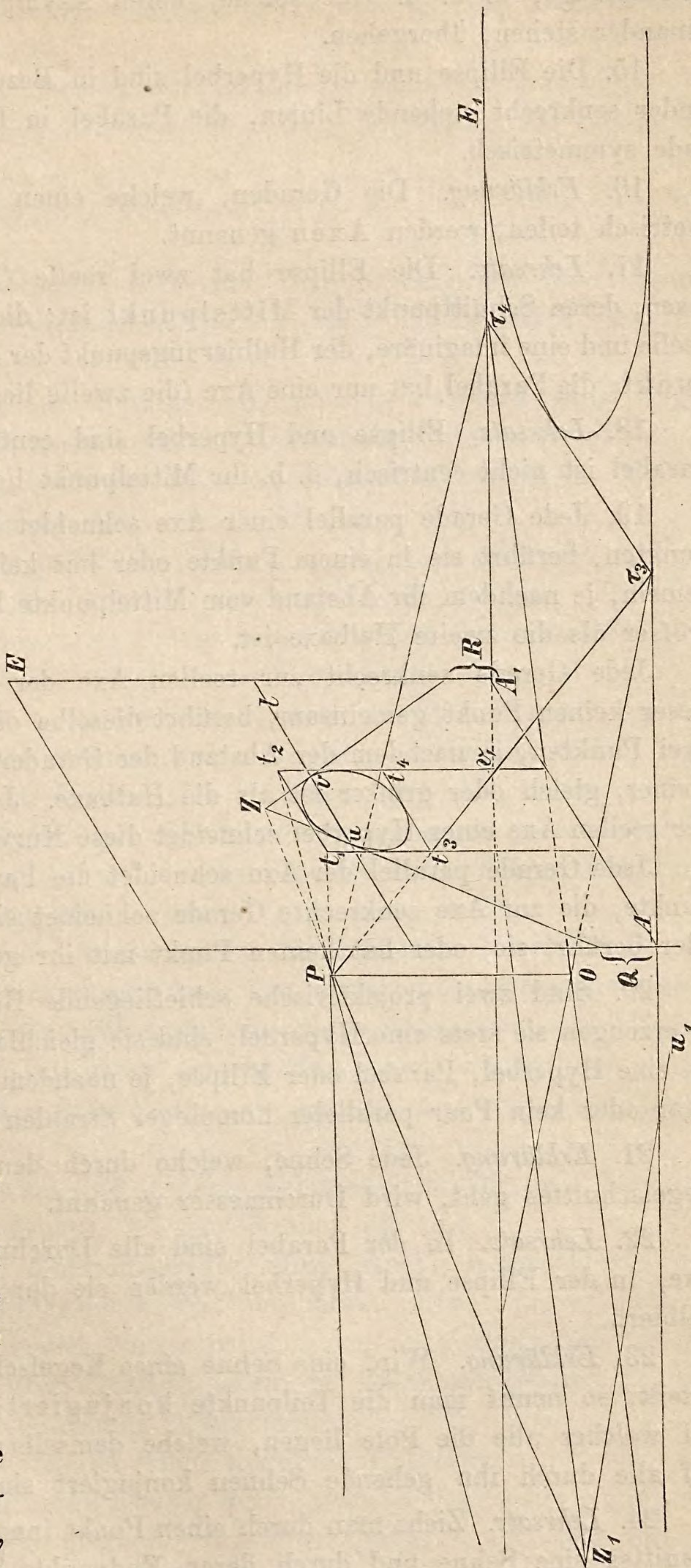


Fig. 37.

gleichseitige, d. h. in eine solche, deren Asymptoten senkrecht zu einander stehen, übergehen.

15. Die Ellipse und die Hyperbel sind in Bezug auf zwei zu einander senkrecht stehende Linien, die Parabel in Bezug auf eine Gerade symmetrisch.

16. *Erklärung.* Die Geraden, welche einen Kegelschnitt symmetrisch teilen, werden Axen genannt.

17. *Lehrsatz.* Die Ellipse hat zwei reelle (große und kleine) Axen, deren Schnittpunkt der Mittelpunkt ist; die Hyperbel hat eine reelle und eine imaginäre, der Halbierungspunkt der ersteren ist Mittelpunkt; die Parabel hat nur eine Axe (die zweite liegt im Unendlichen).

18. *Lehrsatz.* Ellipse und Hyperbel sind centrische Kurven, die Parabel ist nicht centrisch, d. h. ihr Mittelpunkt liegt im Unendlichen.

19. Jede Gerade parallel einer Axe schneidet die Ellipse in zwei Punkten, berührt sie in einem Punkte oder hat keinen Punkt mit ihr gemein, je nachdem ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner, gleich oder größer als die zweite Halbaxe ist.

Jede Gerade senkrecht zur reellen Axe der Hyperbel hat mit dieser keinen Punkt gemeinsam, berührt dieselbe oder schneidet sie in zwei Punkten, je nachdem der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte kleiner, gleich oder größer ist als die Halbaxe. Jede Gerade parallel der reellen Axe einer Hyperbel schneidet diese Kurve in zwei Punkten.

Jede Gerade parallel der Axe schneidet die Parabel nur in einem Punkte, die zur Axe senkrechte Gerade schneidet sie in zwei Punkten, oder berührt sie, oder hat keinen Punkt mit ihr gemein.

20. Sind zwei projektivische schief liegende Büschel gegenläufig, so erzeugen sie stets eine Hyperbel; sind sie gleichlaufend, so erzeugen sie eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem sie zwei Paar, ein Paar oder kein Paar paralleler homologer Strahlen haben.

21. *Erklärung.* Jede Sehne, welche durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes geht, wird Durchmesser genannt.

22. *Lehrsatz.* In der Parabel sind alle Durchmesser parallel der Axe, in der Ellipse und Hyperbel werden sie durch den Mittelpunkt halbiert.

23. *Erklärung.* Wird eine Sehne eines Kegelschnittes harmonisch geteilt, so nennt man die Teilpunkte konjugierte Pole; die Linie, auf welcher alle die Pole liegen, welche demselben Punkt in Bezug auf alle durch ihn gehende Sehnen konjugiert sind, heißt Polare.

24. *Lehrsatz.* Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines Kegelschnittes eine Sehne und durch deren Endpunkte Tangenten an den

Kegelschnitt, so ist deren Schnittpunkt konjugierter Pol zu dem ersteren Punkt, und umgekehrt.

25. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt ist eine Gerade, und umgekehrt ordnet sich jeder Graden als Polare ein Punkt als Pol zu.

26. Die Polaren aller Punkte der Axen als Pole stehen senkrecht zu den letzteren.

27. Der Schnittpunkt je zweier Diagonalen eines vollständigen einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierseits ist Pol zur dritten Diagonale als Polare.

28. Alle zu einem Durchmesser parallelen Sehnen eines Kegelschnittes werden von einem zweiten Durchmesser — dem konjugierten — halbiert. In der Parabel liegen daher die Halbierungspunkte aller Sehnen auf einer Parallelen zur Axe.

Beweis. Alle parallelen Sehnen s_1, s_2, s_3 u. s. f. eines Kegelschnittes sind die Projektionen von Sehnen des Kreises, die durch einen Punkt P gehen. Die Polare p des Punktes P für den Kreis ist eine Gerade, die Verbindungslinie des Projektionscentrums S mit P ist parallel den Sehnen s_1, s_2 , die Projektion Q_1 des Schnittes Q von p mit demjenigen Kreisdurchmesser, dessen Projektion in dem Kegelschnitt zur Hauptaxe wird, wird Mittelpunkt der Kurve, die Projektion p_1 von p wird also Durchmesser und die Sehnen $s_1, s_2, s_3 \dots$ werden von p_1 halbiert, da sie von p_1 und der ins Unendliche gerückten Projektion von P harmonisch geteilt werden.

29. Ist in einem Kegelschnitte ein Durchmesser einem zweiten konjugiert, so ist umgekehrt auch der zweite dem ersten konjugiert.

30. In den Kegelschnitten sind die in den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Tangenten parallel dem jenem ersten konjugierten Durchmesser, in der Parabel sind sie parallel den vom Durchmesser halbierten Sehnen.

31. An Hyperbel und Ellipse giebt es stets für jede Richtung zwei parallele Tangenten, bei der Parabel nur eine.

32. Die vier Taktionspunkte eines einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogramms sind die Ecken eines eingeschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten parallel den Diagonalen des ersteren sind und dessen Mittelpunkt mit jenem des Kegelschnitts und des umschriebenen Parallelogramms zusammenfällt.

33. Die Tangenten an einen Kegelschnitt erzeugen auf zwei sich schneidenden Tangenten desselben projektivische Punktreihen und zwar entspricht dem Taktionspunkt des einen Trägers auf dem zweiten Träger als homologer Punkt der Schnittpunkt der beiden Tangenten.

34. Bei der Hyperbel erzeugen die Tangenten auf den Asymptoten als Trägern projektivische Punktreihen, der Schnittpunkt der Asymptoten ist für beide Träger der Fluchtpunkt.

35. Die von den Tangenten der Hyperbel und von den Asymptoten gebildeten Dreiecke haben konstanten Inhalt.

Beweis. Ist O (Fig. 38) der Schnittpunkt der beiden Asymptoten einer Hyperbel und AA_1 eine Tangente, welche die Asymptoten in A bez. A_1 schneide, so sind A und A_1 homologe Punkte projektivischer Reihen, deren Fluchtpunkte in O zusammenfallen, daher ist $OA \cdot A_1O = \text{konst.}$, somit $\triangle AOA_1$ seinem Inhalte nach konstant.

35^a. (Zusatz.) Verbindet man die Schnittpunkte zweier paralleler Tangenten mit den Asymptoten gegenseitig, so ist der Inhalt des entstehenden Parallelogramms konstant.

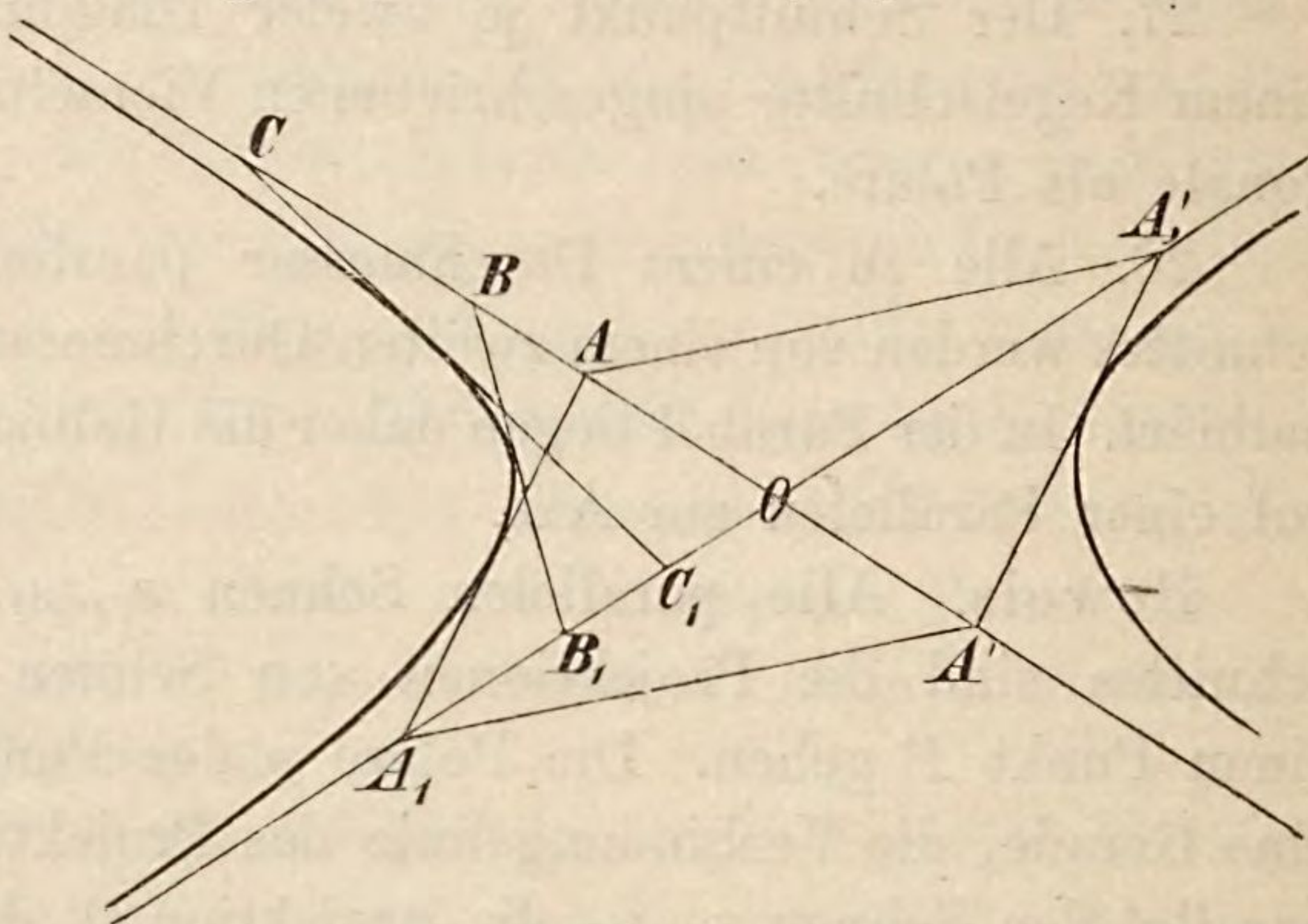


Fig. 38.

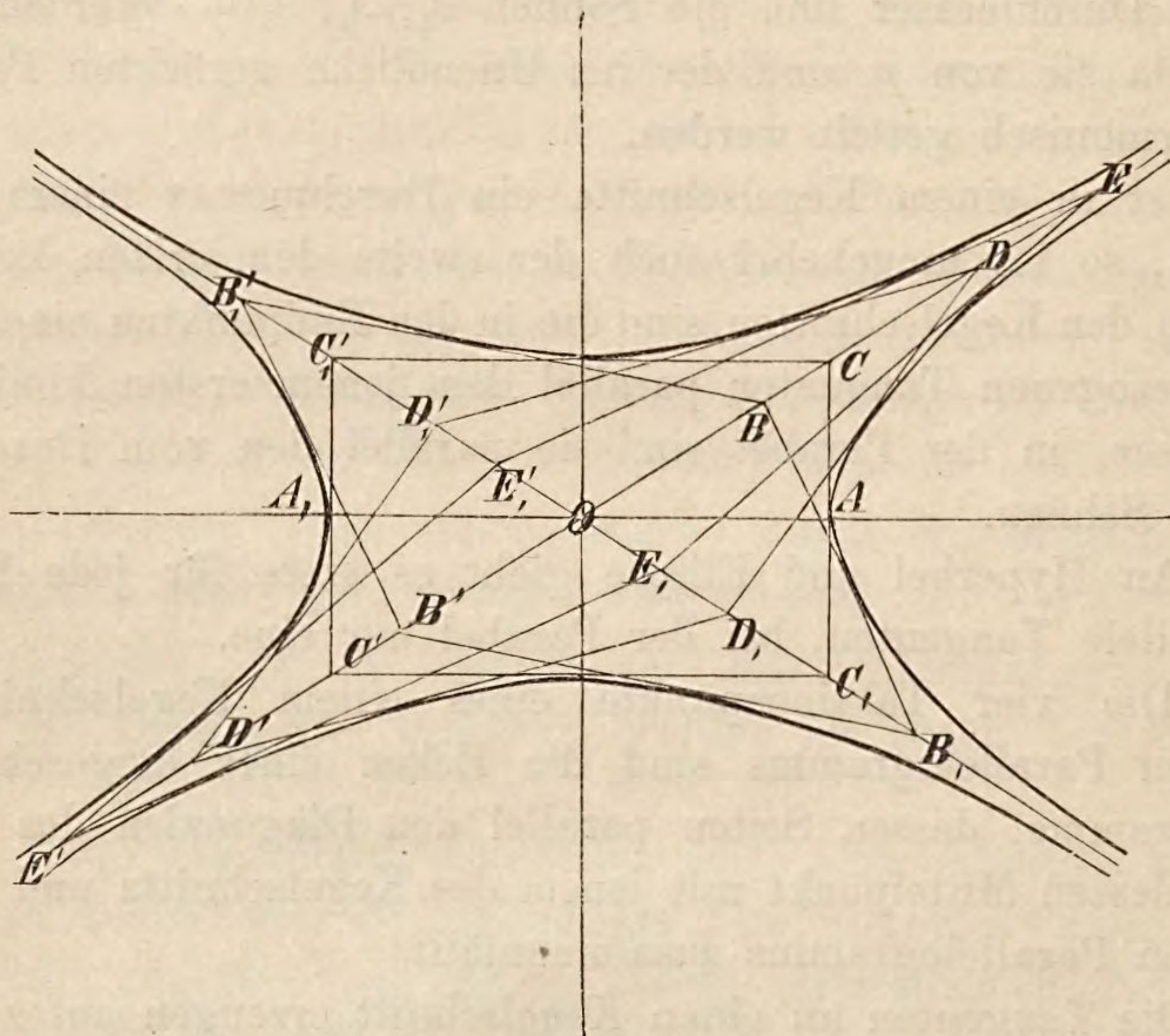


Fig. 39.

36. Dreht man die eine Asymptote einer Hyperbel um den Mittelpunkt (Schnittpunkt der Asymptoten) bis zum Zusammenfallen mit der

anderen, so bilden die von den Tangenten auf den Asymptoten erzeugten projektivischen Punktreihen eine gegenläufige Involution.

37. Fallen von zwei projektivischen Punktreihen die Fluchtpunkte beider Systeme in den Schnittpunkt der Träger, so umhüllen die Verbindungslinien je zweier homologer Punkte als Tangenten eine Hyperbel.

38. Verbindet man (Fig. 39) die von den Tangenten einer Hyperbel auf einer Asymptote erzeugten Punkte mit den von den parallelen Tangenten auf der zweiten Asymptote erzeugten Punkten, so umhüllen diese Verbindungslinien eine zweite Hyperbel, die mit der ersten die Asymptoten gemein hat und deren Hauptaxe die Nebenaxe der ersteren ist und umgekehrt (konjugierte Hyperbel).

§ 8. Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte.

Um- und eingeschriebene Figuren.

1. Durch fünf Punkte ist ein Kegelschnitt vollständig bestimmt.

Beweis. Es seien $ABCDE$ die fünf gegebenen Punkte; wählt man alsdann zwei, z. B. A und B , als Centra und verbindet jeden derselben mit den drei übrigen, so erhalten wir zwei Büschel $A \cdot CDE$ und $B \cdot CDE$, die drei Paar homologer Strahlen besitzen; damit diese Büschel einen Kegelschnitt erzeugen, müssen sie projektivisch sein, d. h. jedem vierten Strahle AX des einen Büschels kann nur ein bestimmter vierter des zweiten entsprechen.

1^a. Zwei Kegelschnitte können sich nur in vier Punkten schneiden.

2. Durch je vier Punkte lassen sich unendlich viele Ellipsen und Hyperbeln, nur eine gleichseitige Hyperbel, zwei oder keine Parabel und im allgemeinen kein Kreis zeichnen.

Beweis. Die vier gegebenen Punkte seien $ABCD$; man nehme A und B zu Centren zweier Büschel an und verbinde beide mit C und D .

a) Jeder beliebig angenommene fünfte Punkt E ergibt mit A und B verbunden das dritte Paar homologer Strahlen zweier projektivischer Büschel, d. h. durch die vier gegebenen und jeden beliebig angenommenen fünften Punkt läßt sich eine Ellipse bez. Hyperbel legen oder durch die gegebenen vier lassen sich unendlich viele legen.

b) Bringt man die Büschel (Fig. 40) A und B ohne Drehung mit den Trägern zur Deckung, so müssen die beiden Doppelstrahlen, wenn die Systeme eine gleichseitige Hyperbel erzeugen sollen, senkrecht zu einander stehen, da die Asymptoten in ihrer Richtung durch sie bestimmt werden. Auf einer Transversale, die parallel einem Doppelstrahl gezogen wird, erzeugen die Büschel gegenläufige ähnliche Reihen;

sind die Schnittpunkte der Strahlen c, d, c_1, d_1 mit der Transversale die Punkte $\gamma, \delta, \gamma_1, \delta_1$ und der des zweiten Doppelstrahles O , so ist $\gamma O \cdot O \delta_1 = \delta O \cdot O \gamma_1 = AO^2$; daher entspricht irgend einem Punkte ε der einen Reihe nur ein Punkt ε_1 der zweiten, oder jedem dritten Strahl des Büschels A entspricht nur ein Strahl im System B , wenn durch A und B eine gleichseitige Hyperbel bestimmt werden soll.

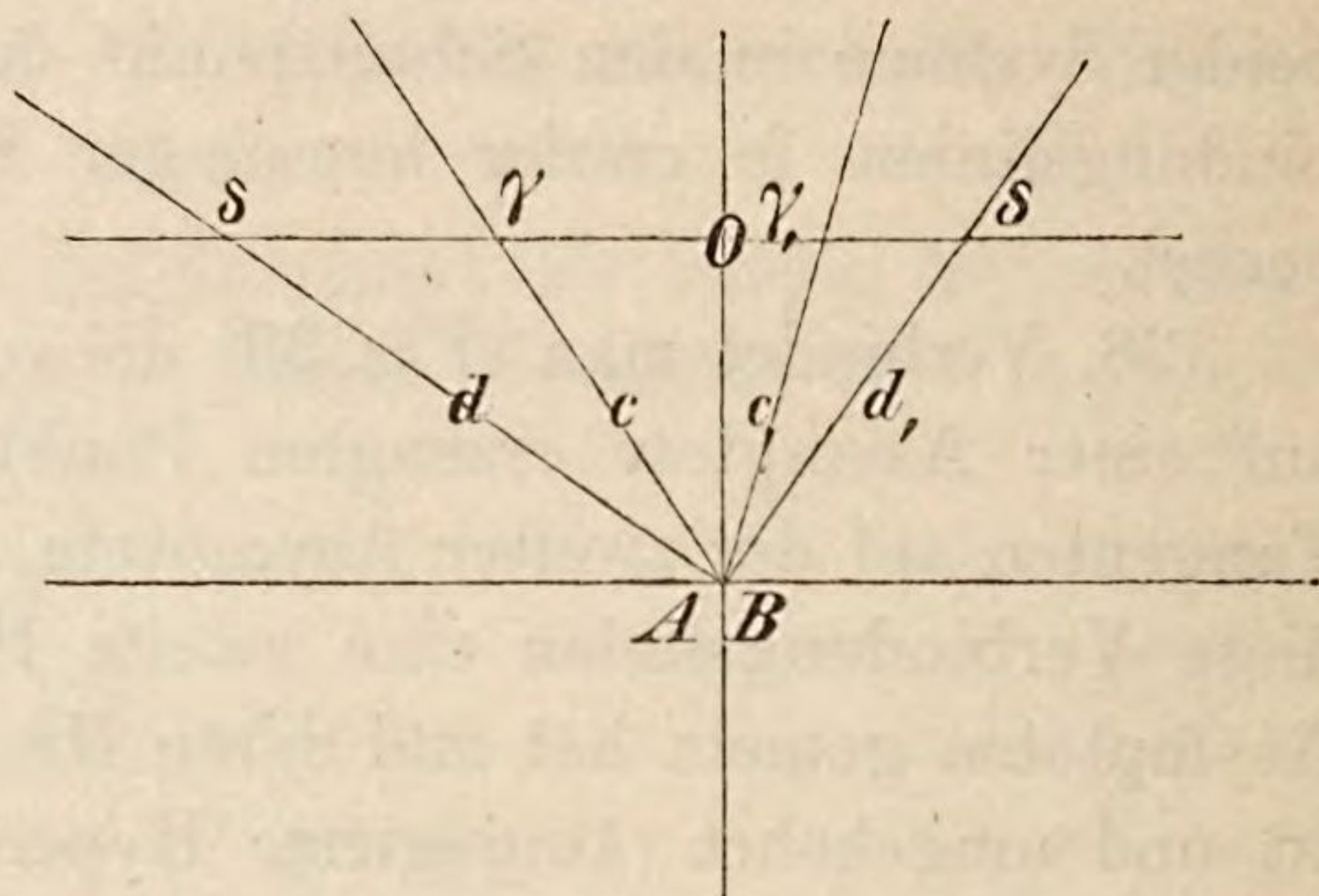


Fig. 40.

c) Verschiebt man die Büschel A und B parallel mit sich selbst, bis die Träger in einander fallen, so haben dieselben, wenn sie eine Parabel bestimmen, nur einen Doppelstrahl; auf jeder Transversale, die parallel dem letzteren ist, erzeugen die Büschel kongruente gleichstimmige Reihen. Daher sind durch zwei homologe Strahlenpaare die Büschel bereits vollständig bestimmt und es giebt für auf einander liegende Büschel von zwei Paar beliebig gewählten Strahlen entweder zwei oder keine Transversale, auf welcher die Strahlen gleiche Stücke abschneiden.

d) Ein Kreis wird durch zwei kongruente gleichstimmige Büschel erzeugt; daher kann durch die vier Punkte $ABCD$ nur dann ein Kreis gelegt werden, wenn $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ ist.

3. Bewegt sich ein Dreieck so, daß die drei Seiten in ihren Verlängerungen durch drei festliegende Punkte gehen, während zwei Ecken auf zwei festliegenden Geraden bleiben, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt.

Beweis. Die drei festliegenden Punkte (Fig. 41) mögen A, B und G , die festliegenden Geraden t_1 und t_2 , die sich in C schneiden, sein; man verbindet A und B mit G und mit C , der Schnittpunkt von AG mit t_1 sei δ , mit t_2 sei D , der von BG mit t_1 sei E , mit t_2 sei ε , ferner verbindet man A mit E und B mit D , so kann man

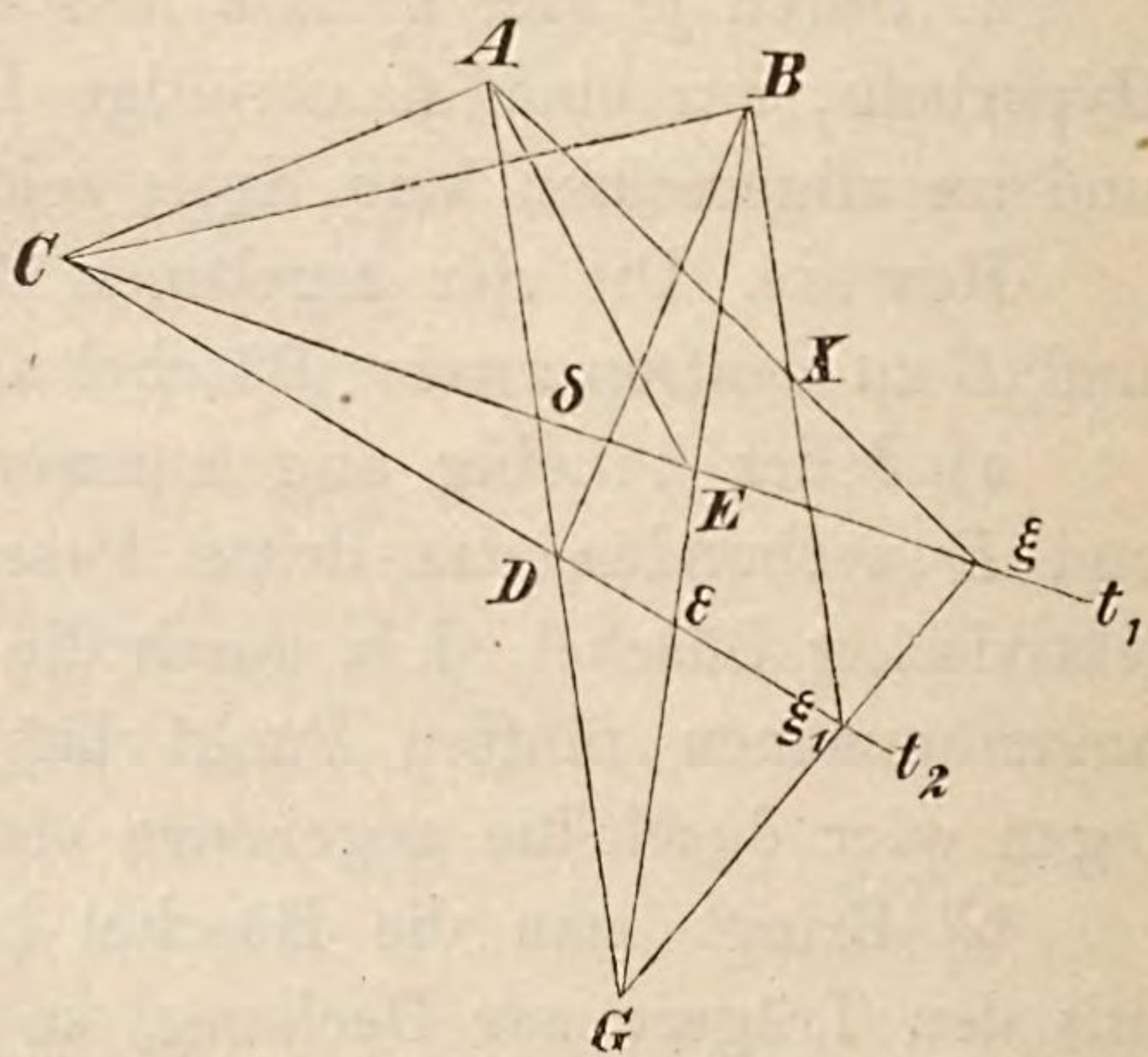


Fig. 41.

offenbar $ABCDE$ als fünf Punkte ansehen, welche einen Kegelschnitt bestimmen, und A und B sind hierbei die Träger projektivischer Büschel; sie erzeugen auf t_1 und t_2 die perspektivisch gelegenen Punkt-

reihen $C\delta E \dots$ und $CD\varepsilon \dots$, deren Augpunkt G ist. Zieht man daher einen beliebigen Strahl durch G , der t_1 in ξ und t_2 in ξ_1 schneidet, und verbindet A mit ξ , B mit ξ_1 , so ist der Schnittpunkt X dieser beiden Verbindungslinien ein Punkt des durch $ABCDE$ bestimmten Kegelschnittes und die dritte Ecke des Dreiecks $X\xi\xi_1$.

4. Fällt bei der Bewegung eines Dreiecks, dessen dritte Ecke einen Kegelschnitt erzeugt (3), diese Ecke mit einem der drei konstanten Punkte zusammen, so ist die eine der zwei Seiten des Dreiecks, welche sich in diesem festen Punkte schneiden, in diesem letzteren Tangente an den Kegelschnitt.

Beweis. Es seien (Fig. 42) A, B und G die drei konstanten Punkte, CE und CD seien die festen Geraden und das Dreieck $X\xi\xi_1$ liege so, daß X mit B , also $X\xi$ mit der Verlängerung von AB zusammenfällt; be-

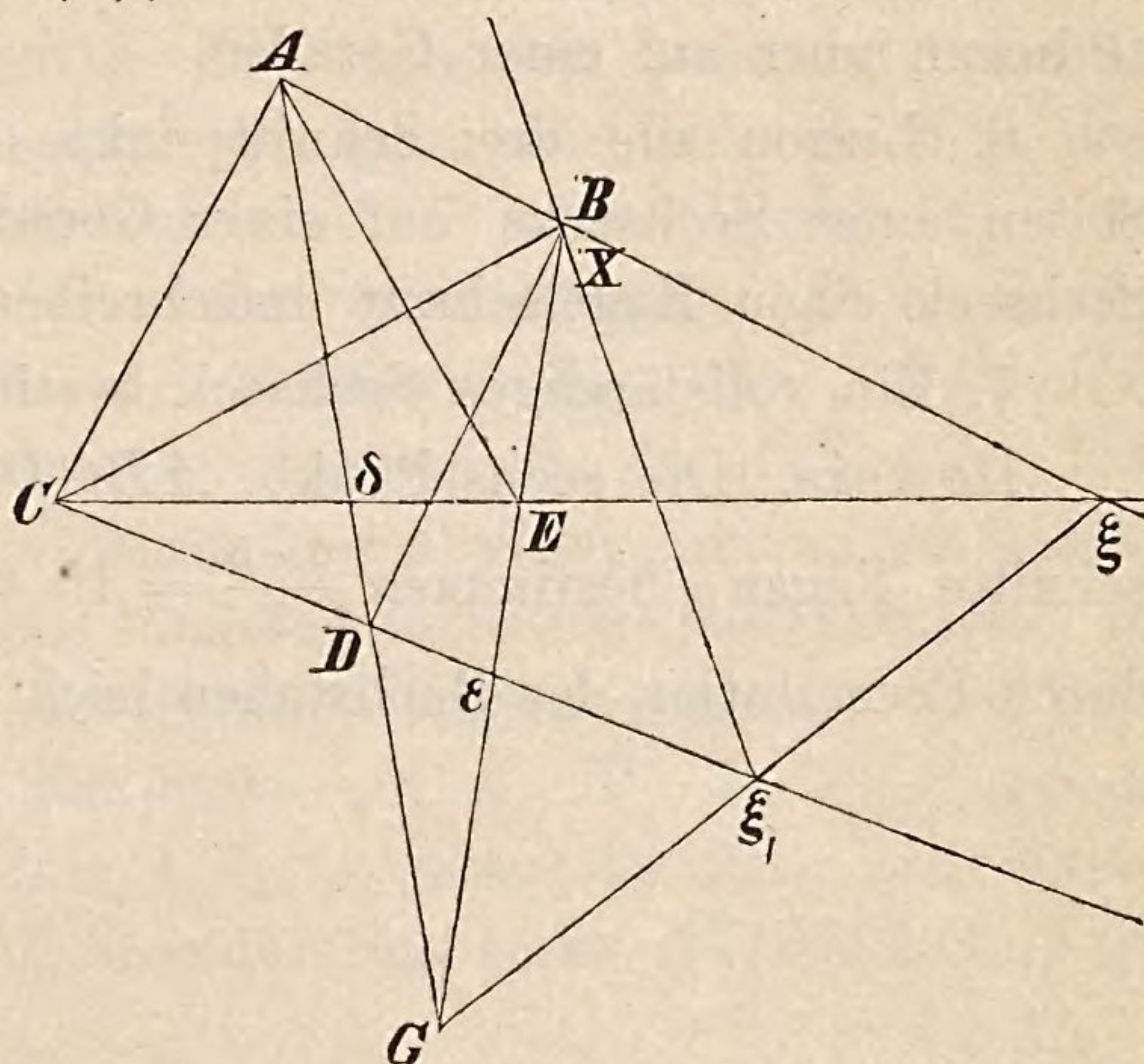


Fig. 42.

zeichnet man noch den Schnitt von AG mit CE durch δ , den von BG und CD mit ε , so sieht man sofort, daß ξ und ξ_1 homologe Punkte in den projektivischen Punktreihen auf CE und CD sind, oder daß dem Strahle $A\xi$ im zweiten Büschel $B\xi_1$ homolog ist, d. h. $B\xi_1$ ist Tangente in B an den durch $ABCDE$ bestimmten Kegelschnitt.

5. (*Pascalscher Lehrsatz*.) Je zwei gegenüberliegende Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks schneiden sich in Punkten einer Geraden.

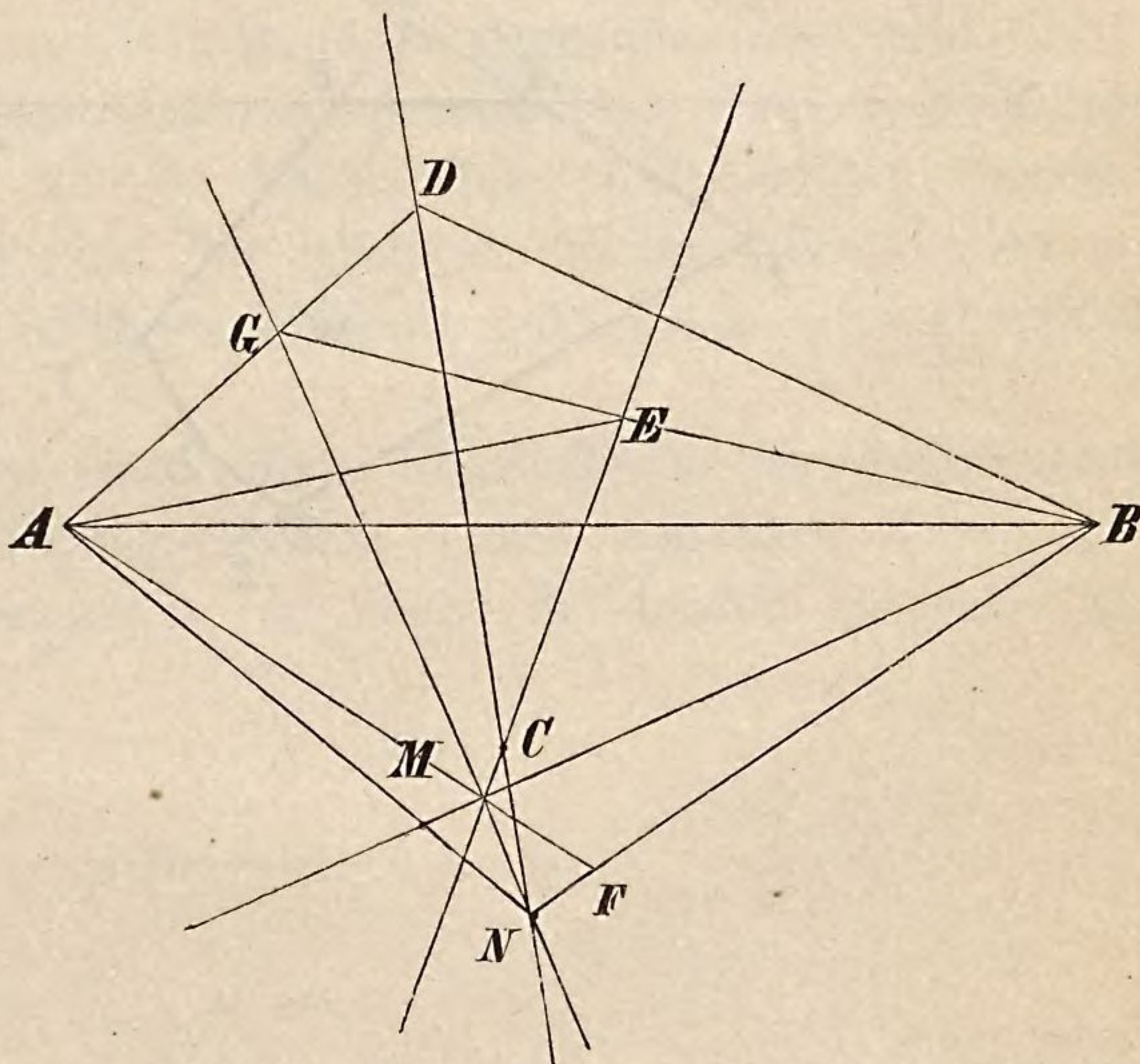


Fig. 43.

Beweis. Es seien (Fig. 43) $ABCDE$ fünf Punkte, welche einen Kegelschnitt bestimmen; man verbinde A mit B , C mit E und mit

D , ferner A mit D und B mit E und verlängere diese beiden Linien bis zum Schnitte, es sei G , ziehe eine beliebige Gerade durch G , sie schneide CE in M , CD in N , verbinde A mit M und B mit N , so ist der Schnittpunkt F dieser beiden Geraden ein Punkt des Kegelschnittes, und $AFBECD A$ ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes Sechseck, in welchem M den Schnittpunkt von AF mit EC , N den von FB mit CD und G den von BE mit DA darstellt; M , N und G liegen aber auf einer Geraden.

6. Liegen die drei Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten eines Sechsecks auf einer Geraden, so kann man stets dem Sechseck einen Kegelschnitt umschreiben. (Pascalsches Sechseck.)

7. Ein vollständiges Sechseck bestimmt 60 Pascalsche Geraden.

Beweis. Die sechs Punkte $ABCDEF$, welche auf einem Kegelschnitte liegen, bestimmen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Geraden, die sich — wie man durch Permutation der Buchstaben leicht sieht — in 60 einfache Sech-

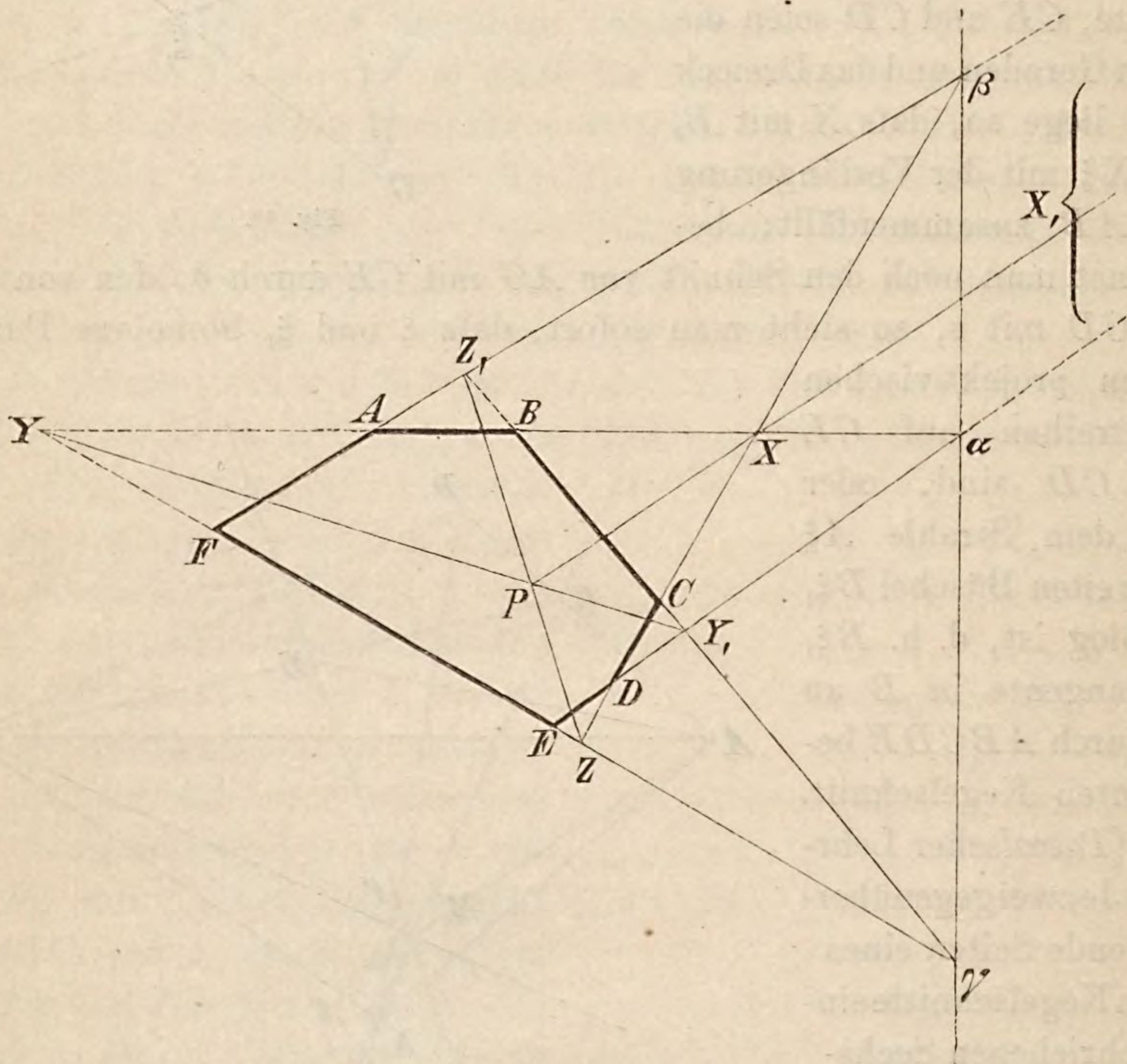


Fig. 44.

ecke zerlegen lassen (z. B. $ABCDEF$, $ABCD FE$, $ABCEDF$ u. s. w. f.). Jedem dieser einfachen Sechsecke entspricht eine Pascalsche Gerade.

8. Je vier Pascalsche Geraden, die zu einem vollständigen einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecke gehören, schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Die vier Geraden, welche sich den einfachen Sechsecken $ABCDEF$, $ABFDEC$, $ABCEDF$ und $ABFEDC$ zuordnen, haben den Schnittpunkt der Gegenseiten AB und DE gemein.

9. Nimmt man zu einem Pascalschen Sechseck jene beiden anderen, welche man dadurch erhält, daß man drei nicht auf einander folgende Ecken cyklisch vertauscht, so schneiden sich die drei den Sechsecken zugeordneten Pascalschen Linien in einem Punkte (Steiner-scher Punkt). Solcher Punkte giebt es im vollständigen Sechseck 20.

Beweis. In dem Pascalschen Sechseck (Fig. 44) $ABCDEF$ kann man je drei nicht auf einander folgende Seiten AB , CD , EF und BC , DE , FA als je ein vollständiges Dreiseit bildend auffassen; es schneiden sich alsdann die homologen Seiten der Dreiseite in Punkten einer Geraden, d. h. sie liegen perspektivisch oder die Verbindungslinien der homologen Endpunkte X , X_1 , Y , Y_1 , Z , Z_1 gehen durch einen Punkt P . Die Linie XX_1 ist aber die Pascalsche Linie des Sechsecks $BAFCDE$, ZZ_1 die des Sechsecks $BEFADC$, YY_1 die des Sechsecks $BCFEDA$.

10. In jedem einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfecke schneiden sich zwei Paare nicht auf einander folgender Seiten in Punkten einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der fünften Seite mit der Tangente in der gegenüber liegenden Ecke geht.

11. Betrachtet man die Berührungspunkte eines einem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits als die Ecken eines vollständigen Vierecks, so liegt je ein Diagonalepunkt des letzteren auf zwei Diagonalen des Vierseits und jede Diagonale des Vierseits geht durch zwei Diagonalepunkte des Vierecks.

12. Fallen die Ecken eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks mit den Berührungspunkten eines derselben Kurve umschriebenen Dreiecks zusammen, so liegen die beiden Dreiecke perspektivisch.

Inhalt.

	Seite
I. Teil. Kegelschnitte in euklidischer Behandlungsweise	1
I. Abschnitt. Ellipse und Hyperbel	1
§ 1. Leitlinien und Brennpunkte	1
§ 2. Brennstrahlen	5
§ 3. Sehnen und Durchmesser	7
§ 4. Tangenten und Normalen	13
§ 5. Pol und Polare	15
§ 6. Asymptoten	18
II. Abschnitt. Parabel	21
§ 7. Brennpunkt, Direktrix, Axe, Durchmesser	21
§ 8. Tangente, Normale, Pol, Polare	24
III. Abschnitt	28
§ 9. Kegelschnitte	28
II. Teil. Neuere Geometrie	32
§ 1. Drei- und Vierpunktreihe; Drei- und Vierstrahlenbüschel . .	32
§ 2. Projektion und Perspektive	35
§ 3. Harmonische Systeme	41
§ 4. Projektivische Punktreihen und Strahlenbüschel.	45
§ 5. Systeme mit gemeinsamem Träger. Involutorische Systeme .	52
§ 6. Der Kreis	58
§ 7. Kegelschnitte. (Allgemeine Bestimmungen)	61
§ 8. Bestimmung der Kegelschnitte durch Punkte. Um- und ein- geschriebene Figuren	71

Königsberger, Leo, zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. [104 S.] gr. 8. geh. n. *M* 3.—

Lagrange's mathematische Elementarvorlesungen. Deutsche Separatausgabe von Dr. H. NIEDERMÜLLER, Oberlehrer am Nicolaigymnasium zu Leipzig. [IV u. 116 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

Mayer, Ernst, Professor an der K. K. Marineakademie in Fiume, über Küstenaufnahmen. Ein Beitrag zu den Lehr- und Handbüchern der Geodäsie. Mit Holzschnitten im Text und vier Tafeln. [60.] gr. 8. geh. n. *M* 2.40.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weissenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. I. Teil: Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. *M* 2.—

Saalschütz, Prof. Dr. Louis, der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Auf Grundlage des strengen Ausdrucks für den Krümmungsradius. Mit Holzschn. im Text u. 3 lithograph. Tafeln. [XXXI u. 247 S.] gr. 8. geh. n. *M* 9.—

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. WILHELM FIEDLER, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. II. Theil: Analytische Geometrie der Curven im Raume, der Strahlensysteme und der algebraischen Flächen. Dritte verb. Aufl. Mit Holzschn. im Text. [LXXII u. 686 S. u. Nachträge 8 S.] gr. 8. geh. n. *M* 16.—

Schell, Dr. Wilhelm, Geh. Hofrath und Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte, ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik mit besonderer Rücksicht auf das Bedürfniss technischer Hochschulen bearbeitet. Zweite umgearbeitete Auflage. II. Band. 3. Theorie der Kräfte und ihrer Aequivalenz (Dynamik im weiteren Sinne einschl. Statik). 4. Theorie der durch Kräfte erzeugten Bewegung (Kinetik oder Dynamik im engeren Sinne). Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. 618 S.] gr. 8. geh. n. *M* 10.—

Schottky, Dr. F., Privatdocent an der Universität Breslau, Abriss einer Theorie der Abel'schen Funktionen von drei Variablen. [162 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4.—

Schröter, Dr. Heinrich, Professor der Mathematik a. d. Universität zu Breslau, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projektivischer Gebilde. Nach JACOB STEINER'S Principien auf synthetischem Wege abgeleitet. [XV u. 720 S. mit vielen Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M* 16.—

Tait, P. G., Prof. der Physik a. d. Universität in Edinburg, elementares Handbuch der Quaternionen. Autoris. Uebersetzung von Dr. G. v. SCHERFF. [XVI u. 332 S.] gr. 8. geh. n. *M* 10.—

Weiler, Dr. A., Privatdocent und Lehrer der Mathematik zu Zürich, Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. [VI u. 98 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. *M.* 1.50.

Behme, Dr. W., Direktor der höheren Gewerbeschule zu Barmen, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen, sowie zum Selbstunterrichte. Sechste verbesserte Auflage. Mit einem besonderen Heft Figurentafeln. [VI u. 106 S.] geh. n. *M.* 2.40.

Soeben ist in meinem Verlage erschienen:

Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für Realschulen zweiter Ordnung, Gewerbeschulen und höhere Bürgerschulen. Von Dr. E. Bardey. gr. 8. geh. Preis *M.* 2. —

Vielseitig ausgesprochenen Wünschen entsprechend, hat Herr Dr. E. Bardey, der Verfasser der großen Aufgabensammlung über alle Teile der Elementararithmetik, einer Aufgabensammlung, welche innerhalb weniger Jahre in fast 70,000 Exemplaren weit über die Grenzen Deutschlands hinaus verbreitet ist, diese kleinere Aufgabensammlung für Realschulen 2. Ordnung, höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen und Progymnasien bearbeitet. Es möge darüber Folgendes bemerkt werden:

1) Die kleinere Aufgabensammlung bringt nur neue Aufgaben, damit die Lehrer neben der größeren auch die kleinere, neben der kleineren auch die größere gebrauchen können.

2) Die schwierigen Abschnitte der größeren Aufgabensammlung werden fehlen. Es fehlen namentlich die dort vorkommenden Aufgaben über arithmetische Reihen höherer Ordnung, über Kombinationen, über Wahrscheinlichkeitsrechnung, eingehende Aufgaben über den binomischen Lehrsatz, allgemeine Aufgaben über höhere Gleichungen, Aufgaben über kubische und quadratische Gleichungen und über die Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Dagegen ist ein Abschnitt über graphische Darstellungen hinzugefügt, welcher in dem größeren Buche nicht vorhanden ist.

3) Die Zahl der Aufgaben in den Grundrechnungsarten ist größer als in der großen Aufgabensammlung.

4) Die Ordnung der Aufgaben zur Einübung der Anfangsgründe ist ein wenig geändert, damit sich dieselbe dem Gange in den Lehrbüchern mehr anschließt.

5) Die kleinere Aufgabensammlung verfolgt einen mehr praktischen Zweck als die größere Aufgabensammlung; daher sind die recht schwierigen Aufgaben vermieden, besonders die recht schwierigen Buchstabengleichungen, während die numerischen Aufgaben vorherrschend sind.

Der wesentlichste Unterschied aber zwischen diesem Buche und der größeren Aufgabensammlung liegt darin, daß hier den Aufgaben in jedem Abschnitt eine Theorie vorangeschickt ist. Die Theorie bildet, so weit die Aufgaben reichen, ein vollständiges Lehrbuch der Arithmetik und soll ein besonderes Lehrbuch überflüssig machen.

Leipzig, 31. März 1881.

B. G. Teubner.

Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer
Lehranstalten

Leipzig 1881

Math.p. 109 n

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650829-1